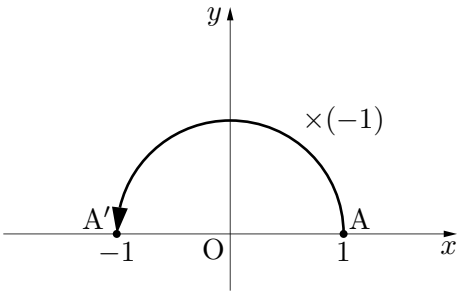
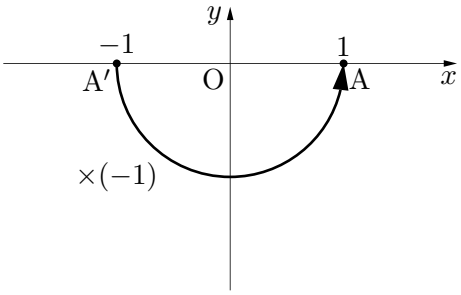
右の図のように, 1 に -1(負の数) をかけることを数直線上で 180° の回転とみる。すると右の図のように, 1 が -1 倍されることで 180° 回転して -1 になり, 再度 $-1(180^\circ)$ をかけるとで, 1 に戻る。このように, 負の数をかけることは, 数直線上では 180° の回転を意味する。



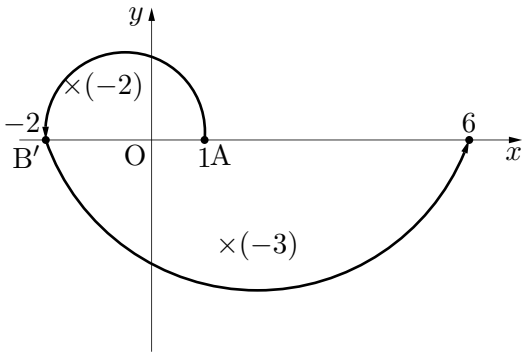
上から 3 つ目の図は, 1 に -2 をかけた場合の様子を表しているが, この場合 1 は数直線上で原点を中心に, 180° 回転して, かつ 2 倍されている。このことは, 後述する複素数と話がつながってくるので, 覚えておこう。



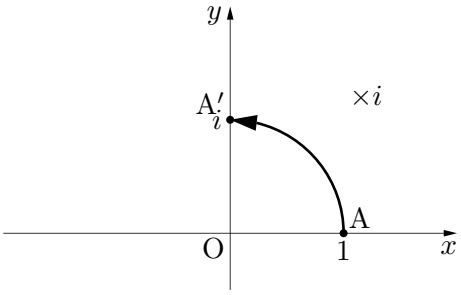
そして, -2 に -3 をかけると, 原点を中心に 180° 回転し, かつ 3 倍されて 6 となる。

つまり, $1 \times (-2) \times (-3) = 6$ である。

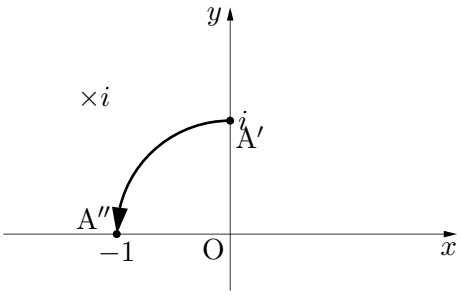
また, 同じ数字を 2 回かけて, 負の数になる数が数直線上には存在しないことがわかる。



$\sqrt{-1}$ が存在していなったときに, いい考えを示した人がいました。それは, -1 をかけることが 180° の回転なら, $\sqrt{-1}$ はその半分の 90° の回転としようと考えたのです。そうすると, どうでしょう。一旦数直線から離れることになります。数直線上にない数なので, 想像上の数 (イマジナリーナンバー) の頭文字をとって i とすることにしました。これで実数軸と虚数軸が誕生したことになる。1 回の回転が 90° なので, 2 回かけると 180° になります。



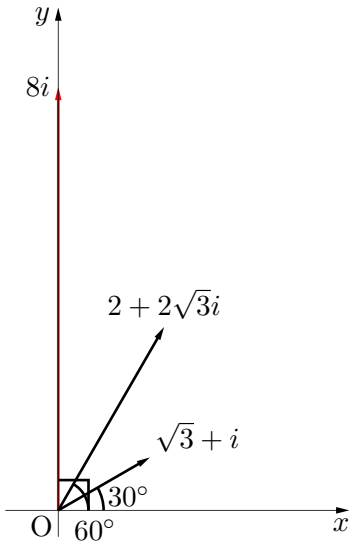
つまり, $\sqrt{-1} = i(90^\circ$ 回転) ですから, $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i \times i = -1(90^\circ$ 回転 $\times 90^\circ$ 回転 $= 180^\circ$ 回転 $(90^\circ + 90^\circ))$ となる。



次に計算結果が分かりやすいように, 右図のような, 大きさ 2, 偏角 30° の複素数を考えると, その複素数は $\sqrt{3}+i$ で表される。同様に大きさ 4, 偏角 60° の複素数を考えると, その複素数は $2+2\sqrt{3}$ で表される。このとき, 2 つの複素数の積は

$$(\sqrt{3}+i)(2+2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}+6i+2i-2\sqrt{3} = 8i$$

となる。8i ということは虚数軸上にあり, 大きさ 8, 偏角 90° である。



この大きさ 8 というのは, 初めの大きさ 2 と大きさ 4 の積で, 4 倍されたことを意味し, 偏角 90° というのは, 初めの偏角 30° と偏角 60° の和になっている。言い換えれば原点を中心に, 偏角 30° に対して, 反時計回りに 60° 回転したことを意味する。

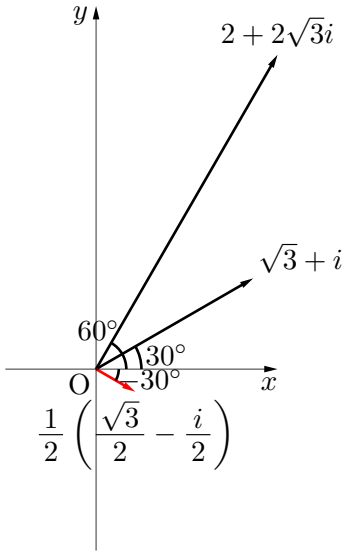
これを極形式で表すと,

$$\begin{aligned} 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\times 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) &= 8(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ) \\ &= 8i \end{aligned}$$

先と同じく, 大きさ 2, 偏角 30° の複素数を考えると, その複素数は $\sqrt{3}+i$ で表される。同様に大きさ 4, 偏角 60° の複素数を考えると, その複素数は $2+2\sqrt{3}$ で表される。このとき, 2 つの複素数の商は

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$$

このとき, この計算結果の複素数の大きさは $\frac{1}{2}$ で偏角は -30° である。



この大きさ $\frac{1}{2}$ というのは, 初めの大きさ 2 と大きさ 4 の商で, $\frac{1}{4}$ 倍されたことを意味し, 偏角 -30° というのは, 初めの偏角 30° と偏角 60° の差になっている。言い換えれば原点を中心に, 偏角 30° に対して, 時計回りに 60° 回転したことを意味している。

これを極形式で表すと,

$$\begin{aligned} 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\div 4(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) &= \frac{1}{2}\{\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ)\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$