　等差数列の初項から第 n 項までの和を考えてみましょう。
まず 1 から 100 までの和をガウスさんはこう考えました。100 までかどうかは知りません。我々は知識として知っていますが、こういう創意工夫ができれば、楽しみは倍増でしょうね。ではこう考えたとされています。

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1+ & 2+ & 3+ & \cdots+ & 98+ & 99+ & 100 \\
+) & 100+ & 99+ & 98+ & \cdots+ & 3+ & 2+ & 1 \\
\hline
 & 101+ & 101+ & 101+ & \cdots+ & 101+ & 101+ & 101
\end{array}
$$

101 が 100 個あるので、$101 \times 100 = 10100$
上と下の 2 行分の和の合計が 10100 なのでその半分が 1 から 100 の和になる。
よって、
$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 10100 \div 2 = 5050$ ……(答)
同じように考えて 1 から n までの n 個の和を考えてみます。

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1+ & 2+ & 3+ & \cdots+ & (n-2)+ & (n-1)+ & n \\
+) & n+ & (n-1)+ & (n-2)+ & \cdots+ & 3+ & 2+ & 1 \\
\hline
 & (n+1)+ & (n+1)+ & (n+1)+ & \cdots+ & (n+1)+ & (n+1)+ & (n+1)
\end{array}
$$

同様に考えて、
$(n+1) \times n \div 2 = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdots$ ①
①は 1 から n までの n 個の和を表したものである。1 をはじめの数 (初項)、n を最後の数 (第 n 項)、$\times n$ の n を数の総数 (項数) とすると、高校生で習う等差数列の和の公式が誕生する。
等差数列の初項から第 n 項 (n 番目) まで項数 n(総数 n 個) の和 S(Sum) は、
S$=\dfrac{\{(\text{初項}) + (\text{第n項})\} \times n}{2} \cdots$ ②
が得られる。
ではこの 1〜n までの n 個の自然数の和を直接考えてみましょう。
次の表を見てみましょう。

個数	和	計算の工夫による和の求め方。
1 個	1	$1 \times 2 \div 2 = 1$
2 個	1+2=3	$2 \times 3 \div 2 = 3$
3 個	1+2+3=6	$3 \times 4 \div 2 = 6$
4 個	1+2+3+4=10	$4 \times 5 \div 2 = 10$
5 個	1+2+3+4+5=15	$5 \times 6 \div 2 = 15$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n 個	$\cdots$	$n \times (n+1) \div 2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

これで、計算の工夫によって等差数列の和が求められることが分かりました。
また、これらすべては長方形の半分の面積、すなわち三角形の面積を表しています。以下すべて同じです。(底辺) $\times$ (高さ) $\div 2$ の基本公式そのものです。
では、高校生の等差数列の和の求め方も同じようにして求められるのではないでしょうか。

例 1

例えば、3,7,11,15,19,$\cdots$, $4n-1$ という数列 (初項 3, 項差 4, 第 n 項 $4n-1$) があったとします。その和は、

3,10,21,36,55,$\cdots$ となります。それを工夫してみます。

和	計算の工夫による和の求め方。
3	$2 \times 3 \div 2 = 3$
3+7=10	$4 \times 5 \div 2 = 10$
10+11=21	$6 \times 7 \div 2 = 21$
21+15=36	$8 \times 9 \div 2 = 36$
36+19=55	$10 \times 11 \div 2 = 55$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$2n \times (2n+1) \div 2 = n(2n+1)$

この最後に得られた式 $n(2n+1)$ を高校生で学ぶ公式で求めてみましょう。高校生の等差数列の初項から第 n 項までの項数 n の和 S は先の②で与えられる。もう一度書くと、

S= $\dfrac{\{(\text{初項}) + (\text{第 } n \text{ 項})\} \times n}{2}$

上の数列は初項 3、第 n 項 $4n-1$ であるから、

S= $\dfrac{\{3 + (4n-1)\} \times n}{2} = n(2n+1)$

同じ式が得られました。

もう少し例を見てみましょう。

例 2

4,10,16,22,28,$\cdots$, $6n-2$ という数列 (初項 4, 項差 6, 第 n 項 $6n-2$) で見てみると、

和	計算の工夫による和の求め方。
4	$2 \times 4 \div 2 = 4$
4+10=14	$4 \times 7 \div 2 = 14$
14+16=30	$6 \times 10 \div 2 = 30$
30+22=52	$8 \times 13 \div 2 = 52$
52+28=80	$10 \times 16 \div 2 = 80$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$2n \times (3n+1) \div 2 = n(3n+1)$

ここで最初の計算の工夫ですが、等差数列の和の公式①からも分かるように、最後 2 で割ります。ですから、ほとんどの場合、最初の計算の工夫は初項に 2 をかけて 2 で割るという計算の工夫の仕方になります。そして、次からの計算の工夫ですが、初項には項差 (この場合 6) の半分 3 を加えていきます。掛ける数は 2 の倍数 ($2n$) を順にかけていき、2 で割るという作業を繰り返します。

表にしてみました。

例 2 をさらに考えて

和	計算の工夫による和の求め方。項差 6 なので 3 を足していく
4	$2 \times 4 \div 2 = 4$
14	$4 \times (4 + 3 \times 1) \div 2 = 14$
30	$6 \times (4 + 3 \times 2) \div 2 = 30$
52	$8 \times (4 + 3 \times 3) \div 2 = 52$
80	$10 \times (4 + 3 \times 4) \div 2 = 80$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$2n \times \{4 + 3(n-1)\} \div 2 = n(3n+1)$

項差が偶数であれば、その半分は整数になりますが、奇数の場合、小数になります。奇数の場合は違う方法でやれなくない場合もありますが、この場合統一性を持たせて考えてみます。

例 3

4,11,18,25,32,$\cdots$, $7n-3$(初項 4, 項差 7, 第 n 項 $7n-3$) の数列で、和を考えてみます。

和は 4,15,33,58,90,$\cdots$ となります。①の等差数列の和の公式より、求めてみます。初項から n 番目までの和 S は

S= $\dfrac{\{4+(7n-3)\} \times n}{2} = \dfrac{n(7n+1)}{2}$ となります。次に先ほどの項差の半分を加えていく方法で考えてみます。

和	計算の工夫による和の求め方。項差 7 なので 3.5 を足していく
4	$2 \times 4 \div 2 = 4$
15	$4 \times (4 + 3.5 \times 1) \div 2 = 15$
33	$6 \times (4 + 3.5 \times 2) \div 2 = 33$
58	$8 \times (4 + 3.5 \times 3) \div 2 = 58$
90	$10 \times (4 + 3.5 \times 4) \div 2 = 90$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$2n \times \{4 + 3.5(n-1)\} \div 2 = \dfrac{n(7n+1)}{2}$

このように、この方法でも初項から第 n 項までの和は求められます。

最後に、最初にも言いましたが、この場合、底辺は $2n$, 高さは $3.5n + 0.5$ の三角形の面積を求めているのです。そんな気がしますね。ではでは参考までに。

奇数の和は面白いですよ。

1=1

1+3=4

1+3+5=9

1+3+5+7=16

1+3+5+7+9=25

1+3+5+$\cdots$+$(2n-1) =$ 考えてみましょう。答えは次のページです。

(答え)n^2

余談というか補足ですが、先ほどの例 3 の最後の表を下に書いてみます。

和	計算の工夫による和の求め方。項差 7 なので 3.5 を足していく
4	$2 \times 4 \div 2 = 4$
15	$4 \times (4 + 3.5 \times 1) \div 2 = 15$
33	$6 \times (4 + 3.5 \times 2) \div 2 = 33$
58	$8 \times (4 + 3.5 \times 3) \div 2 = 58$
90	$10 \times (4 + 3.5 \times 4) \div 2 = 90$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$2n \times \{4 + 3.5(n-1)\} \div 2 = \dfrac{n(7n+1)}{2}$

この表は $2n$ をかけることを前提として式を作っています。

ただ、項差が奇数の場合は、単に n をかけるようにすることで、すっきりとした整数どうしの積に持って行けますので、そのほうが良いとは思います。

和	計算の工夫による和の求め方。項差 7 なので 7 を足していく
4	$1 \times 8 \div 2 = 4$
15	$2 \times (8 + 7 \times 1) \div 2 = 15$
33	$3 \times (8 + 7 \times 2) \div 2 = 33$
58	$4 \times (8 + 7 \times 3) \div 2 = 58$
90	$5 \times (8 + 7 \times 4) \div 2 = 90$
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	$n \times \{8 + 7(n-1)\} \div 2 = \dfrac{n(7n+1)}{2}$

参考までに。まぁもっともこんな面倒なことしなくていいんですが。正直必要ないかもね。書いてる本人もよく分かってなかったりするかも (猛爆) ただ、等差数列の和としてとらえるのではなく、階差数列の一般項、すなわち階差数列の第 n 項として捉えると得した気分になる?なるかな～ただこれも正しいかどうかは分かりません。ではでは失敬。