漸化式 1

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ 3a_{n+1} = a_n + 4\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義するとき，

(1) $a_{n+1} - p = k(a_n - p)$ となるように，p, k の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

〔練習問題〕

(1) 特性方程式　$3x = x + 4$　$2x = 4$　$x = 2$ より

与式は　$3(a_{n+1} - 2) = a_n - 2$ となって

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(a_n - 2)$　　$\therefore\ p = 2,\ k = \frac{1}{3}$

(2) 数列 $a_n - 2$ を b_n とおくと　$b_{n+1} = \frac{1}{3} b_n$ となり

b_n は初項　$b_1 = a_1 - 2 = -1$　公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$b_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　　$a_n - 2 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2$