2

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n$ を求めなさい。　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$\cdots A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$ とすると

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k \cdot 2 & 0 \\ 0 & 3^k \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ を求めなさい。　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2+2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \quad 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} = \frac{1\cdot(2^k-1)}{2-1} = 2^k-1$$

より

$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^k-1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2(2^k-1) \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2^{k+1}-1 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$