n を整数とするとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことを証明せよ。〔有名問題〕

i) $n>0$ のとき

$n=1$ のとき，

$\cos\theta + i\sin\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ で成りたつ

$n=k$ のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ が成り立つとすると

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin\theta\sin k\theta) + i(\sin\theta\cos k\theta + \sin k\theta\cos\theta)\\ &= \cos\{\theta(k+1)\} + i\sin\{\theta(k+1)\}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときも成りたつ 以上により

帰納的に $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ が成りたつ

ii) $n=0$ のとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = \cos 0 + i\sin 0$ より $1=1$ よって成り立つ

iii) $n=-m$ のとき（m は自然数）

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}\\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}\\ &= \cos m\theta - i\sin m\theta\\ &= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

$n=-m$ より

①は $\cos n\theta + i\sin n\theta$

i), ii), iii) より n を整数とするとき

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ が成り立つ