3C max min 8

関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x-2\sin 2x+\sin x$ の区間 $[0,\ \pi]$ における最大値および最小値を求めよ。 〔大阪大〕

$f'(x)=\cos 3x-4\cos 2x+\cos x$

$=\cos 3x+\cos x-4\cos 2x$ 　　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=2\cos 2x\cos x-4\cos 2x$

$=2\cos 2x(\cos x-2)$

$f'(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で 0 になるのは

$\cos 2x=0$ のときで このとき $x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

このとき $f(x)$ の増減を調べると

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{2\sqrt{2}-6}{3}$	↗	$\frac{2\sqrt{2}+6}{3}$	↘	0

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{4}-2\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{3\sqrt{2}}-2+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-12}{6}=\frac{2\sqrt{2}-6}{3}$

$f(\frac{3}{4}\pi)=\frac{1}{3}\sin\frac{9}{4}\pi-2\sin\frac{3}{2}\pi+\sin\frac{3}{4}\pi$

$=\frac{1}{3\sqrt{2}}+2+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+6}{3}$

以上より

(答) 最大値は $x=\frac{3}{4}\pi$ のときで $\frac{2\sqrt{2}+6}{3}$

最小値は $x=\frac{\pi}{4}$ のときで $\frac{2\sqrt{2}-6}{3}$