3C max min 37

正四角錐 $V$ に内接する球を $S$ とする。$V$ をいろいろ変えるとき, 比 $= \dfrac{S\text{の表面積}}{V\text{の表面積}}$ のとりうる値のうち, 最大のものを求めよ。ここで, 正四角錐とは, 底面が正方形で, 底面の中心と頂点を結ぶ直線が底面に垂直であるような角錐のこととする。〔東京大〕

図1

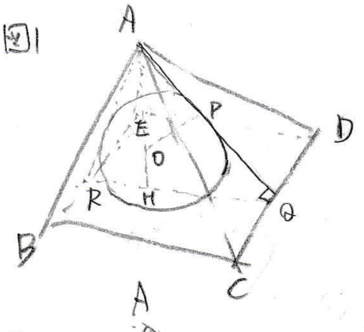
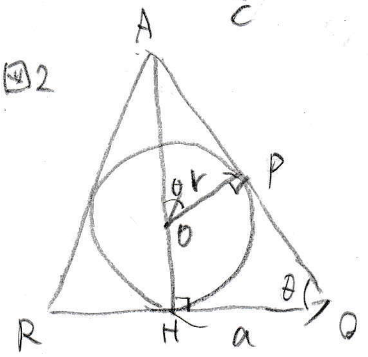



図2




四角すいを頂点Aと点R, Q (∵R, Qは辺BE, CDの中点) を含む平面で切ると図2のような断面が得られる

PはACと球の接点, AHは正四角すいの高さ, Oは球の中心

$\angle AQH = \theta$, 球の半径 $r$, $HQ = a$ とおく

$AQ\cos\theta = a$ より $AQ = \dfrac{a}{\cos\theta}$

∴正四角すいの表面積 $S_V$ は

$$S_V = 2a\cdot\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 + (2a)^2$$

$$= \frac{4a^2}{\cos\theta} + 4a^2 = \frac{4a^2(1+\cos\theta)}{\cos\theta}$$

$\triangle AOP \backsim \triangle AQH$ であり、$\tan\theta = \dfrac{AH}{a}$ より $AH = a\tan\theta$ ∴ $AO = a\tan\theta - r$

$AO : OP = AQ : QH$ より $(a\tan\theta - r) : r = \dfrac{a}{\cos\theta} : a$

$$\frac{ar}{\cos\theta} = a^2\tan\theta - ar$$

$$r\left(\frac{a}{\cos\theta} + a\right) = a^2\tan\theta$$

$$r = \frac{a\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1} = \frac{a\frac{\sin\theta}{\cos}}{\frac{1}{\cos\theta}+1} = \frac{a\sin\theta}{1+\cos\theta}$$ これより球の表面積 $S_S$ は

$$S_S = 4\pi\left(\frac{a\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)^2 = \frac{4\pi a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$\text{比}\ H(\theta) = \frac{\frac{4\pi a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}}{\frac{4a^2(1+\cos\theta)}{\cos\theta}} = \frac{\pi\sin^2\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3} = \frac{\pi\cancel{(1+\cos\theta)}(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1+\cos\theta)^{\cancel{3}2}}$$

$$∴ H(\theta) = \frac{\pi\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$\cos\theta = t$ とおくと (∵ $0<t<1$)

$$H(t) = \frac{\pi t(1-t)}{(1+t)^2}\ (∵0<t<1)$$

$$H'(t) = \frac{\pi(1-2t)(1+t)^2 - 2(1+t)\cdot\pi t(1-t)}{(1+t)^4}$$

$H'(t) = \pi\dfrac{1-3t}{(1+t)^3}$ となり

| $t$ | 0 | … | $\frac{1}{3}$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'(t)$ | | + | 0 | − | |
| $H(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | |

よって $t = \dfrac{1}{3}$ のとき極大かつ最大値で その値は $\dfrac{\pi}{8}$