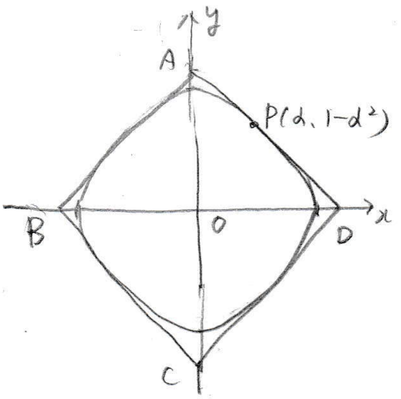
3Cmm m33

曲線 $|y| = 1 - x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に外接し, 頂点が x 軸, y 軸上にあるようなひし形の面積の最小値を求めよ。 〔静岡大〕



$y \geqq 0$ $y = 1 - x^2$

$y \leqq 0$ $y = -1 + x^2$

第1次象限でのグラフ上の点を $P(\alpha, 1-\alpha^2)$ とし、接線を考える

$y = 1 - x^2$ より $y' = -2x$ であるから P における接線の式は

$y = -2\alpha(x - \alpha) + 1 - \alpha^2$ $\therefore y = -2\alpha x + \alpha^2 + 1$

この接線と x 軸との交点を D、y 軸との交点を A とし、原点を O とする。このとき、$\triangle AOD$ の面積が最小となることを考える

$A(0, \alpha^2+1)$ $D\left(\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha}, 0\right)$ より $\triangle AOD$ の面積を $S(\alpha)$ とすると

$$S(\alpha) = \frac{(\alpha^2+1)^2}{4\alpha} \quad (\because\ 0 < \alpha \leqq 1)$$

$$S'(\alpha) = \frac{(4\alpha^3+4\alpha)\cdot 4\alpha - 4(\alpha^2+1)^2}{16\alpha^2} = \frac{4\alpha^4+4\alpha^2-\alpha^4-2\alpha^2-1}{4\alpha^2}$$

$$= \frac{3\alpha^4+2\alpha^2-1}{4\alpha^2} = \frac{(3\alpha^2-1)(\alpha^2+1)}{4\alpha^2}$$

$0 < \alpha \leqq 1$ より $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極値をとる。その値は極小かつ最小で $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	1

よって求めるひし形の面積はその4倍

$\therefore$ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9} \times 4 = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

$\underline{\dfrac{16\sqrt{3}}{9}}$