訂正あり

正数

kを定数とする。関数 $f(x)=\dfrac{1-k^2}{x-1}-\dfrac{3}{x^2}$ が，$x>1$ において極大値および極小値をもつように，k の値の範囲を定めよ。〔関西学院大〕

$$f'(x)=\frac{-(1-k^2)}{(x-1)^2}+\frac{6}{x^3}=\frac{6(x-1)^2-(1-k^2)x^3}{x^3(x-1)^2}\quad(\because x\neq 0,\ x\neq 1)$$

このとき $f'(x)$ の分子

$6(x-1)^2-(1-k^2)x^3=0$ が $x>1$ で異なる2つの実数解を

もてばよい　$1-k^2\neq 0$ として方程式を変形すると

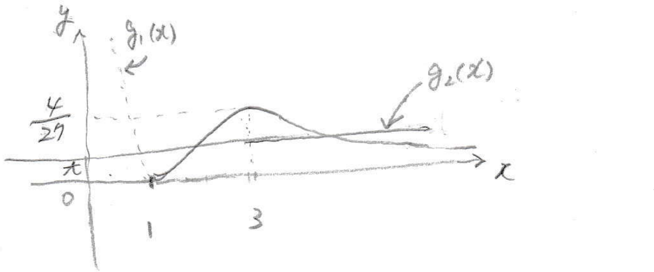
$$\frac{(x-1)^2}{x^3}=\frac{1-k^2}{6}\quad(x>1)\quad として$$

$$g_1(x)=\frac{(x-1)^2}{x^3}$$

$g_2(x)=\dfrac{1-k^2}{6}=t$ とおくとき $g_1(x)$ のグラフは，

$$g_1(x)'=\frac{2(x-1)\cdot x^3-3x^2(x-1)^2}{x^6}=\frac{-x^2+4x-3}{x^4}=\frac{(-x+1)(x-3)}{x^4}\quad(x\neq 0)$$

x	…	1	…	3	…
$g_1'(x)$	／	0	+	0	−
$g(x)$	／	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘



よって　$0<t<\dfrac{4}{27}$　すなわち

$$0<\frac{1-k^2}{6}<\frac{4}{27}$$

$$0<1-k^2<\frac{8}{9}$$

$\dfrac{1}{9}<k^2<1$　　$k>0$ より　$\dfrac{1}{3}<k<1$