3C不等式20

$f(x) = \sin x + \cos x - 1 - x + x^2$ のとき,

(1) $\sin x + \cos x = A\sin(x + B)$ とおくとき, $A(> 0)$ と B を求めよ。

(2) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ。

(3) $x > 0$ のとき, (1) と (2) を用いて次の不等式を証明せよ。

$$\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$$

〔大阪工大〕

(1) $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$　　$A = \sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$

(2)

$f'(x) = \cos x - \sin x - 1 + 2x$

$f''(x) = -\sin x - \cos x + 2$

(3) $f''(x) = -\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$　　$-1 \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ より

$f''(x)$ は実数 x について つねに $f''(x) > 0$ …①

$f'(0) = 0$ と① より, $x > 0$ では $f'(x) > 0$ …②

$f(0) = 0$ と $f'(x) > 0$ ($\because x > 0$) より $f(x) > 0$ である.

ゆえに

$\sin x + \cos x > 1 + x - x^2$ が成り立つ