関数 $f(x) = x^3 + x + 1$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x+h) - f(x)$ を x の多項式で表わせ。

(2) $a > 0,\ h > 0$ のとき,

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h)$$

をみたす θ の中で正のものを求めよ。

(3) h が 0 に近づくとき, (2) の θ の極限値を求めよ。

〔北見工大〕

(1) 題意より

$(x+h)^3 + (x+h) + 1 - x^3 - x - 1$

$= \cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \cancel{x} + h + \cancel{1} - \cancel{x^3} - \cancel{x} - \cancel{1}$

$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h$

$\underline{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}$ //

(2) $f'(x) = 3x^2 + 1$ より

$f'(a+\theta h) = 3(a+\theta h)^2 + 1$ これと(1)の結果から

$3a^2h + 3ah^2 + h^3 + h = \{3(a+\theta h)^2 + 1\} \times h$

$3(a+\theta h)^2 + 1 = 3a^2 + 3ah + h^2 + 1$

$3(a+\theta h)^2 = 3a^2 + 3ah + h^2$

$(a+\theta h)^2 = a^2 + ah + \frac{h^2}{3}$

$a + \theta h = \sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}}$

$\theta h = \sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}} - a$ より $\theta = \frac{1}{h}\left(\sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}} - a\right)$

(3) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}} - a\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{a^2 + ah + \frac{h^2}{3} - a^2}{\sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}} + a}$

$\displaystyle = \lim_{h \to 0} \frac{a + \frac{h}{3}}{\sqrt{a^2 + ah + \frac{h^2}{3}} + a} = \frac{a}{2a} = \underline{\frac{1}{2}}$ //