ベクトル78

ベクトルの記号、　ok

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ において, $\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が垂直で, $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right| = 2\left|\vec{b}\right|$ とする。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ ($0° \leqq \theta \leqq 180°$) を求めよ。

(2) $\left|\vec{a}\right| = 1$ のとき, $\left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|$ ($t>0$) の最小値を求めよ。

〔群馬大〕

(1) 題意より

$(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{0}$

$|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=\vec{0}$　$|\vec{a}|^2=4|\vec{b}|^2$ であるから $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ …①

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$ であるから,

$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$ ①より

$4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{b}|^2$ …②

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ であり ①,②より $\cos\theta=\dfrac{-|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}||\vec{b}|}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ より $0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから $\theta=120°$

(2)

$\left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|^2=t^2|\vec{a}|^2+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{t^2}|\vec{b}|^2$ …①

ここで $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ より $|\vec{b}|=\frac{1}{2}$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{b}|^2=-\frac{1}{4}$ であるから ①は

$t^2+\dfrac{1}{4t^2}-\dfrac{1}{2}$ と表せるので

$$t^2+\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{1}{4t^2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

等号は $t^2=\frac{1}{4t^2}$ つまり $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成り立つから

$\left|t\vec{a}+\frac{1}{t}\vec{b}\right|$ の最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$