ベクトル74

空間内において同一平面上にない2つの三角形△ABCと△A'B'C'について, $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'A'} = 2\overrightarrow{CA}$ が成り立っているとする。このとき, 次の各問に答えよ。

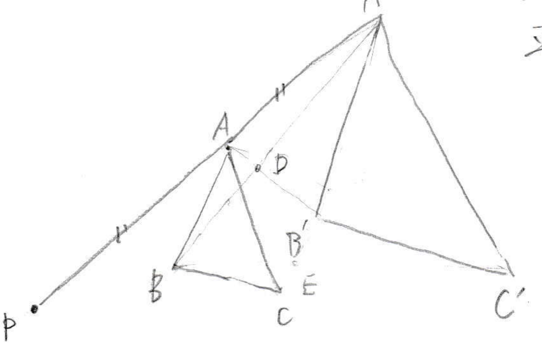
(1) 線分A'Aを2：1に外分する点をPとするとき, 点Pは線分B'Bおよび線分C'Cを2：1に外分する点であることを示せ。

(2) 5点P, A, B, A', B'を含む平面上で, 直線A'Bと直線AB'の交点をDとする。このとき, $\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ を用いて表せ。

(3) 直線B'Cと直線BC'の交点をE, 直線C'Aと直線CA'の交点をFとする。さらに, △ABC, △A'B'C', △DEFの重心をそれぞれG, G', Hとする。このとき, G, G', Hが同一直線上にあることを示せ。

〔宮城教育大〕

(1)



同一平面上にないので
平面ABC // 平面A'B'C'となり

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$ …(a)

$\overrightarrow{PB'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}$ …①

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PA}$　$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ より ①は

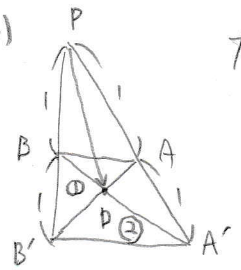
$\overrightarrow{PB'} = 2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB})$ …(b)

(a),(b)より Pは線分B'Bを2:1に外分する.
同様に

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}$ …(c)　$\overrightarrow{PC'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C'} = 2(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC})$

よってPは線分C'Cを2:1に外分する

(2)



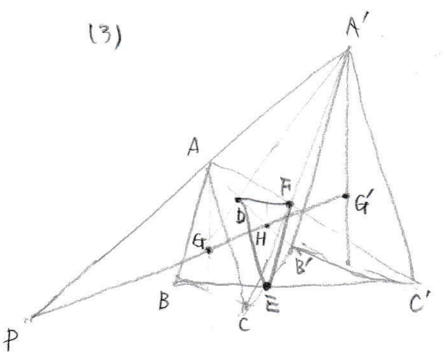
左図においてメネラウスの定理より $\frac{AA'}{AP} \times \frac{PB'}{B'B} \times \frac{BD}{DA'} = 1$ より

$\frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{BD}{DA'} = 1$ ∴ $\frac{BD}{DA'} = \frac{1}{2}$ より

$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$ (∵ $\overrightarrow{PA'} = 2\overrightarrow{PA}$)

∴ $\overrightarrow{PD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$

(3)



$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ …(1)

$\overrightarrow{PG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ …(2)

$\overrightarrow{PH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF})$

$= \frac{1}{3}\left\{\frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})\right\}$

$= \frac{2}{9}(2\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC})$

$= \frac{4}{9}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ …(3)　(∵ $\overrightarrow{PE} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$, $\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})$)

(1),(2),(3)より $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{PG'} - \overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$　$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{PH} - \overrightarrow{PG} = \frac{1}{9}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$

∴ $\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{GH}$　よって3点G,G',Hが同一直線上にある.