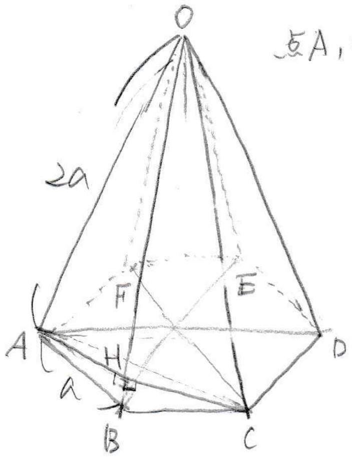
1A 図形 11

OK

底面が正六角形 ABCDEF で頂点が O の正六角錐 O−ABCDEF がある。底面の辺の長さを a, OA=OB=OC=OD=OE=OF=$2a$ とする。2 つの面 △OAB と △OBC のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めよ。 〔早稲田大学・文系〕



点A, CからOBに垂した垂線の足をHとする

$\angle AOB = \alpha$ とすると

$a^2 = 4a^2 + 4a^2 - 2\cdot 2a \cdot 2a \cos\alpha$

$8a^2\cos\alpha = 7a^2$ $a \neq 0$ より

$\cos\alpha = \frac{7}{8}$

$AH = 2a\sin\alpha$ $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\therefore AH = 2a\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{\sqrt{15}}{4}a$

$\angle AHC = \theta$ より △AHCで余弦定理を用いる

$AC = \sqrt{3}a$ $AH = HC = \frac{\sqrt{15}}{4}a$ より

$(\sqrt{3}a)^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}a\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}a\cos\theta$

$3a^2 = \frac{15}{16}a^2 + \frac{15}{16}a^2 - \frac{15}{8}a^2\cos\theta$

$\frac{15}{8}a^2\cos\theta = -\frac{9}{8}a^2$

$\cos\theta = -\frac{\cancel{9}\,3}{\cancel{15}\,5}$

$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$