IA 図形1

一辺の長さが1の正三角形ABCを底面とする四面体OABCを考える。ただし, OA=OB=OC=aであり, $a \geqq 1$とする。頂点Oから三角形ABCにおろした垂線の足をHとする。

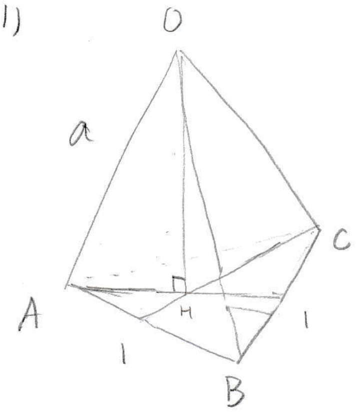
(1) 線分AHの長さを求めよ。

(2) aを用いて線分OHの長さを表せ。

(3) 四面体OABCが球Sに内接しているとする。この球Sの半径rをaを用いて表せ。

〔北海道大〕

(1)

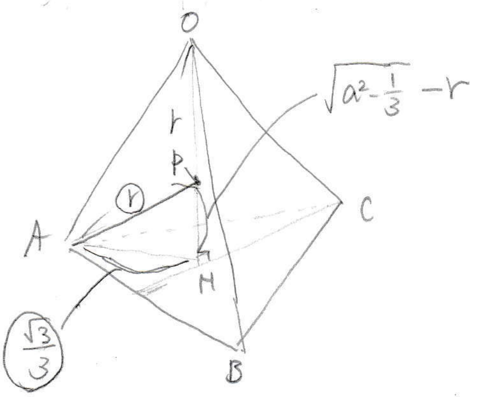


$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(2)

$$\underline{OH = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}} \qquad (OH^2 = OA^2 - AH^2)$$

(3) 球の中心をPとする。球の半径rとし△PAHで三平方の定理を用いると



$$\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} - r\right)^2 = r^2 - \frac{1}{3}$$

$$a^2 \cancel{-\frac{1}{3}} - 2r\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} \cancel{+r^2} = \cancel{r^2} \cancel{-\frac{1}{3}}$$

$$2r\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}} = a^2$$

$$r = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}}}$$

$$\therefore \underline{r = \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{3a^2 - 1}}}$$