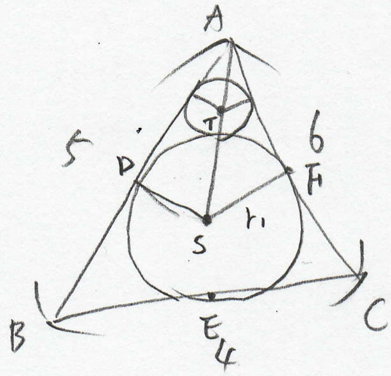
三角形ABCにおいてAB=5, BC=4, CA=6とするとき, 2辺AB, CAに接し, かつ三角形ABCの内接円C_1に外接する円C_2の半径r_2を求めよ。



DEFは内接円とAB, BC, ACの接点, S, Tは円の中心

余弦定理で $\cos\angle BAC$ を求める　$\angle BAC=\theta$ とする

$16=25+36-2\cdot5\cdot6\cos\theta$

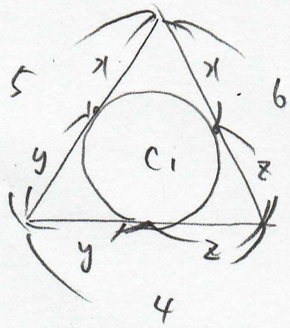
$\cos\theta=\frac{3}{4}$

よって　$\sin\theta=\frac{\sqrt7}{4}$ ($0<\theta<180$ より)

$\triangle ABC$の面積は　$\frac12\cdot5\cdot6\sin\theta=\frac12\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt7}{4}=\frac{15}{4}\sqrt7$

内接円C_1の半径をr_1とすると

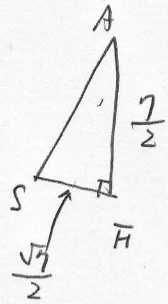
$\frac12(4r_1+5r_1+6r_1)=\frac{15}{4}\sqrt7$　$r_1=\frac{\sqrt7}{2}$



左図のように x, y, z をとると

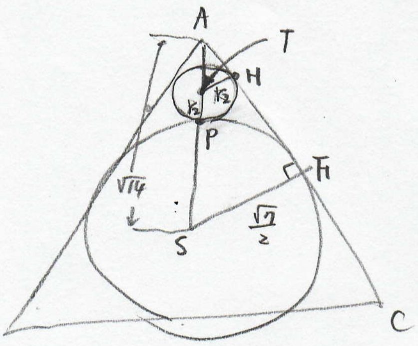
$$\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=4 \\ x+z=6 \end{cases}$$

これより　$x=\frac72$



三平方の定理より

$AS=\sqrt{14}$



Pを円と円の接点とすると

$AP=AS-r_1=\sqrt{14}-\frac{\sqrt7}{2}$

求める円の半径をr_2としてその円とACの接点をHとすると

$\triangle ATH \backsim \triangle ASF$

$AS:SF=\sqrt{14}:\frac{\sqrt7}{2}=2\sqrt2:1$

また $AT=AP-r_2$ より $=\sqrt{14}-\frac{\sqrt7}{2}-r_2$

$AS:SF=AT:TH=\underline{\sqrt{14}-\frac{\sqrt7}{2}-r_2:r_2=2\sqrt2:1}$

〰部より

$2\sqrt2\,r_2=\sqrt{14}-\frac{\sqrt7}{2}-r_2$

$4\sqrt2\,r_2=2\sqrt{14}-\sqrt7-2r_2$

$(4\sqrt2+2)r_2=\sqrt7(2\sqrt2-1)$

$r_2=\frac{\sqrt7(2\sqrt2-1)}{4\sqrt2+2}=\frac{\sqrt7(2\sqrt2-1)(4\sqrt2-2)}{(4\sqrt2+2)(4\sqrt2-2)}=\frac{\sqrt7(9-4\sqrt2)}{14}$

(答) $\frac{\sqrt7(9-4\sqrt2)}{14}$