R5.7.8 訂正

△ABC において, AB=4, BC=6 とする。辺 BA の延長上に CA=CD となるように点 D をとり, CA= x, AD= y とする。

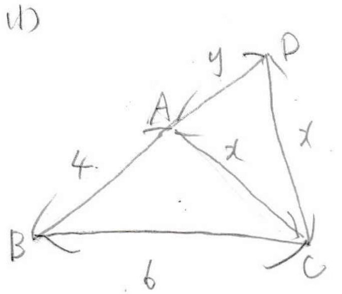
(1) △ACD において, $\cos D$ を x, y の式で表せ。

(2) y を x の式で表せ。

(3) △ACD の 3 辺の和が最大となるとき, △ACD の外接円の半径 R を求めよ。

〔日本工大〕

(1)



△ACDで余弦定理を用いると

$\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+y^2-2xy\cos D$

∴ $\cos D=\dfrac{y}{2x}$

(2)

△BCDで余弦定理を用いると

$6^2=(y+4)^2+x^2-2\cdot x\cdot(y+4)\cos D$ 　$\dfrac{y}{2x}$

$36=(y+4)^2+x^2-y(y+4)$

$36=\cancel{y^2}+8y+16+x^2-\cancel{y^2}-4y$

$-4y=x^2-20$

$y=-\dfrac{x^2}{4}+5$

(3) △ACDの3辺の和は $2x+y$, (2)より $y=-\dfrac{x^2}{4}+5$ なので

$2x+y=-\dfrac{x^2}{4}+2x+5$ 　これを z とおくと

$z=-\dfrac{x^2}{4}+2x+5$

$=-\dfrac{1}{4}(x^2-8x)+5$

$=-\dfrac{1}{4}(x-4)^2+9$

$x=4$ のとき最大値9となる

$x=4$ のとき　$y=-\dfrac{4^2}{4}+5=1$ なので

$\cos D=\dfrac{1}{2\cdot 4}=\dfrac{1}{8}$

$0<\theta<180$ なので $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{63}}{8}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

正弦定理より外接円の半径Rとすると

$2R=\dfrac{AC}{\sin D}=\dfrac{4}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\dfrac{32}{3\sqrt{7}}$ 　$R=\dfrac{16}{3\sqrt{7}}$

$R=\dfrac{16\sqrt{7}}{21}$