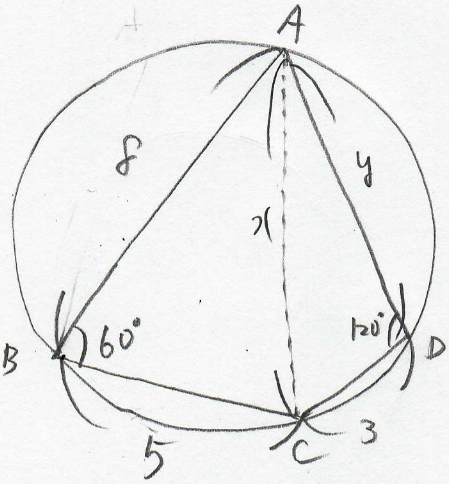
円に内接する四角形 ABCD において, AB=8, BC=5, CD=3, ∠ABC =60° とするとき, 四角形 ABCD の面積を求めなさい。



左図のように AC=x、AD=y とおく

∠ADC=120° となる

まず四角形ABCDの面積は

△ABC+△ACDで求める

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin 60^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{10\sqrt{3}}$ …①

AC=xとして余弦定理で求める

$x^2 = 64+25-2\cdot 8\cdot 5 \overset{\frac{1}{2}}{\cos 60}$

$= 89-40$

$= 49$　$x>0$ より $x=7$

△ACDでAD=yとして先のAC=7を用いて余弦定理で

ADを求める

$49 = y^2+9-2\cdot 3\cdot y \overset{-\frac{1}{2}}{\cos 120^\circ}$

$49 = y^2+9+3y$

$y^2+3y-40=0$

$(y+8)(y-5)=0$　$y>0$ より $y=5$

これより

$\triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3 \sin 120^\circ$

$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \underline{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$ …②

①、②より 四角形ABCD $= 10\sqrt{3}+\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

$\underline{\frac{55\sqrt{3}}{4}}$