ok

正弦余弦 37　　訂正有り

鋭角三角形 ABC において $\sqrt{3}(b+c) = 2a(\sin B + \sin C)$ が成り立つとする。ただし，B, C は，それぞれ ∠B, ∠C の大きさで，a, b, c は，それぞれ辺 BC, CA, AB の長さである。

(1) ∠A の大きさを求めよ。

(2) ∠A の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき，比 BP : PC を b, c で表せ。　訂正

(3) $b = 8, c = 5$ のとき，△ABP の内接円の半径と外接円の半径を求めよ。

〔佐賀大〕

(1)

$\sin B = \dfrac{b}{2R}$　$\sin C = \dfrac{c}{2R}$　($\because$ R は △ABC の外接円の半径)

$\sqrt{3}(b+c) = 2a\left(\dfrac{b}{2R} + \dfrac{c}{2R}\right)$

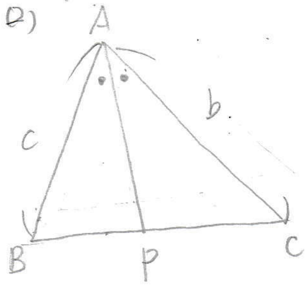
$\sqrt{3}(b+c) = \dfrac{a}{R}(b+c)$　$b+c \neq 0$ より

$\sqrt{3} = \dfrac{a}{R}$　　$R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ …①

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ と①から，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$　$\therefore \sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　($\because a \neq 0$)

∠A は鋭角なので　∠A = 60°

(2)

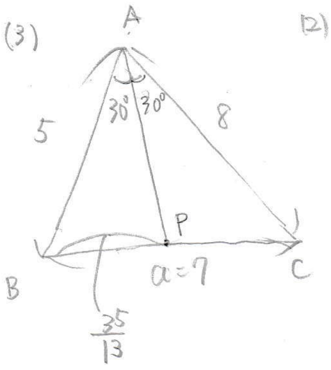


角の二等分線の性質より

BP : PC = AB : AC = c : b

BP : PC = c : b

(3)



(2)より　$BP = 7 \times \dfrac{5}{13} = \dfrac{35}{13}$　$PC = \dfrac{56}{13}$

外接円の半径を R とすると

$\dfrac{\frac{35}{13}}{\sin 30^\circ} = 2R$　$\dfrac{70}{13} = 2R$　$R = \dfrac{35}{13}$

AP = x とすると △ABP で余弦定理を用いると

$\left(\dfrac{35}{13}\right)^2 = x^2 + 25 - 2\cdot x\cdot 5\cos 30^\circ \rightarrow 169x^2 - 845\sqrt{3}x + 3000 = 0$ ①

△APC で同様のことをすると

$\left(\dfrac{56}{13}\right)^2 = x^2 + 64 - 2\cdot x\cdot 8\cos 30^\circ \rightarrow 169x^2 - 1352\sqrt{3}x + 7680 = 0$ ②

①−②より　$507\sqrt{3}x = 4680$　$x = \dfrac{120}{13\sqrt{3}}$ となり $AP = \dfrac{40}{13}\sqrt{3}$

外接円の半径
$\dfrac{35}{13}$
内接円の半径
$\dfrac{25\sqrt{3}-30}{13}$

△ABP の面積 S は $S = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot \dfrac{40}{13}\sqrt{3}\sin 30^\circ$ より $S = \dfrac{50}{13}\sqrt{3}$

内接円の半径 r とすると　$\dfrac{1}{2}r\left(5 + \dfrac{35}{13} + \dfrac{40}{13}\sqrt{3}\right) = \dfrac{50}{13}\sqrt{3} \rightarrow \dfrac{1}{2}r(65 + 35 + 40\sqrt{3}) = 50\sqrt{3}$

$(50 + 20\sqrt{3})r = 50\sqrt{3}$　$(5 + 2\sqrt{3})r = 5\sqrt{3}$　$r = \dfrac{5\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}$　$\therefore r = \dfrac{25\sqrt{3}-30}{13}$