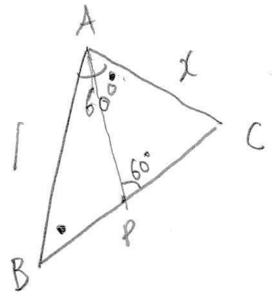
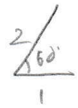
1A 正弦 36

OK

AB=1, AC= x (ただし, $0 < x < 1$), $\angle A = 60^\circ$ である $\triangle$ABC がある。辺 BC 上に点 P を $\angle CAP = \angle ABP$ であるようにとる。このとき, $\angle APC = \boxed{}$ である。BC, CP, AP をそれぞれ x の式で表すと BC= $\boxed{}$, CP= $\boxed{}$, AP= $\boxed{}$ である。また, $\triangle$APB の面積 S を x の式で表すと $S = \boxed{}$ である。〔関西学院大・文系〕



$\angle APC = 60^\circ$

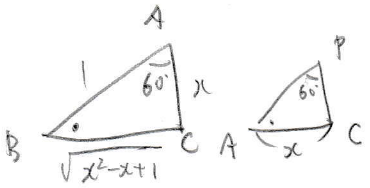


余弦定理より

$BC^2 = 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos 60^\circ$

$BC^2 = 1 + x^2 - x$　　$BC > 0$ より

$BC = \sqrt{x^2 - x + 1}$



$x : CP = \sqrt{x^2-x+1} : x$

$\sqrt{x^2-x+1} \cdot CP = x^2$　　$CP = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$1 : AP = \sqrt{x^2-x+1} : x$　　$\therefore AP = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$\triangle APB = \dfrac{1}{2} \cdot BP \cdot AP \sin 60^\circ$ で与えられるから

$BP = BC - CP = \sqrt{x^2-x+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$\therefore S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \dfrac{\sqrt{3}x(1-x)}{4(x^2-x+1)}$