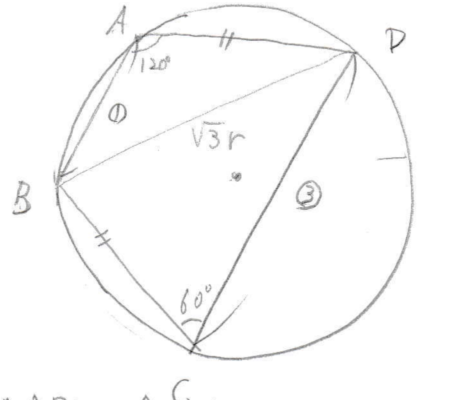
正余弦 34

半径 r の円に内接する四角形 ABCD が AB$=\dfrac{CD}{3}$, $AB^2=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{DA}{2}$, $\cos\angle BAD=-\dfrac{1}{2}$ を満たしている。このとき, AB$=\boxed{}$, $r=\boxed{}$ である。〔東京慈恵医科大〕



$\sin^2\angle BAD = 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{3}{4}$　$\sin\angle BAD>0$より

$\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …①

$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=2r$　①より　$BD=\sqrt{3}r$.

△ABDで余弦定理を用いると

$3r^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$　$DA=2AB^2$より　$AB=x$とすると

$3r^2=x^2+4x^4+2x^3$ …②　次に

△BCDで余弦定理を用いると

$3r^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos 60°$　$BC=2AB^2$　$CD=3AB$　で $AB=x$とおくと

$3r^2=4x^4+9x^2-6x^3$ …③

②と③の右辺は等しいので

$x^2+4x^4+2x^3=4x^4+9x^2-6x^3$

$8x^3-8x^2=0$

$8x^2(x-1)=0$　$x\neq0$より　$x=1$

このとき

$3r^2=1+4+2$

$3r^2=7$

$r^2=\frac{7}{3}$　$r>0$より

$r=\sqrt{\frac{7}{3}}$

以上より　$AB=1$　$r=\frac{\sqrt{21}}{3}$