正弦余弦 33

1辺の長さが1の正三角形ABCがある。辺BCの中点Mを中心とする半径rの円が辺ABおよび辺ACと共有点をもつとき, ABとの共有点のうち頂点Aに近い方の点をDとし, ACとの共有点のうち頂点Aに近い方の点をEとする。

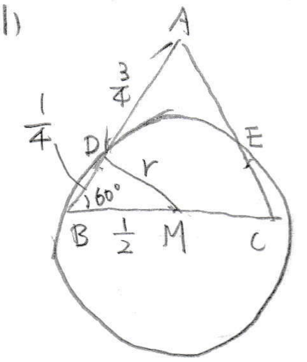
(1) ADの長さが$\dfrac{3}{4}$であるとき, rの値を求めよ。

(2) ADの長さをxとおくとき, r^2をxの式で表せ。

(3) $\angle \mathrm{DME} = \theta$とおくとき, $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$となる$r$の値を求めよ。

〔千葉大〕

(1)



△DBMで ∠DBM=60°, DB=$\frac{1}{4}$, BM=$\frac{1}{2}$であるから

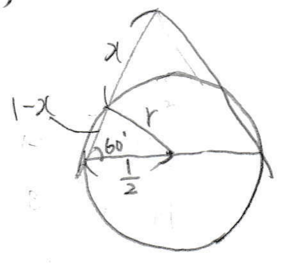
DM=rとして余弦定理を用いると.

$$r^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} - \frac{2}{16} = \frac{3}{16}$$

$\therefore r>0$ より $\underline{r = \dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

(2)

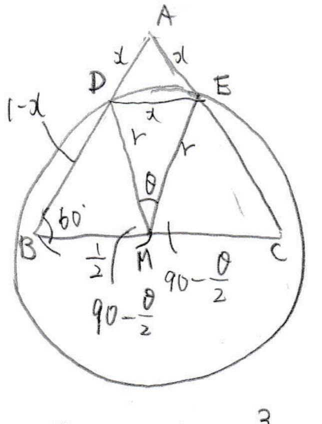


$$r^2 = (1-x)^2 + \frac{1}{4} - 2\cdot(1-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 60^\circ$$

$$r^2 = 1 - 2x + x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \underline{r^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}}$$

(3)



△DEMで余弦定理を用いると

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos\theta$$

$$= 2r^2 - \frac{2}{3}r^2$$

$$x^2 = \frac{4}{3}r^2$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}r \quad (\because x>0)$$

これを(2)の求めた式に代入すると

$$r^2 = \frac{4}{3}r^2 - \sqrt{3}r + \frac{3}{4}$$

$$12r^2 = 16r^2 - 12\sqrt{3}r + 9$$

$$4r^2 - 12\sqrt{3}r + 9 = 0$$

$$(2r - 3\sqrt{3})^2 - 18 = 0$$

$$2r - 3\sqrt{3} = \pm 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{3} \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

$\because 0 < r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\underline{r = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{2}}$$