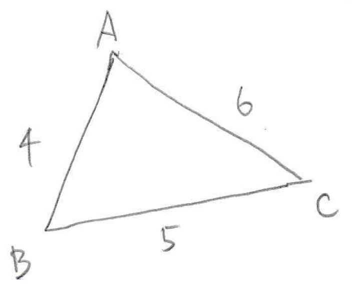
正弦32

△ABC において AB=4, BC=5, CA=6 のとき, $\cos B = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ であり, △ABC の外接円の面積は $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\pi$ である。さらに △ABC の外接円上に点 D を A, B, C, D がこの順に並ぶようにとる。CD=2 のとき, DA= $\dfrac{-\boxed{}+\boxed{}\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ である。

〔大同大〕



余弦定理より

$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos B$

$40 \cos B = 5$

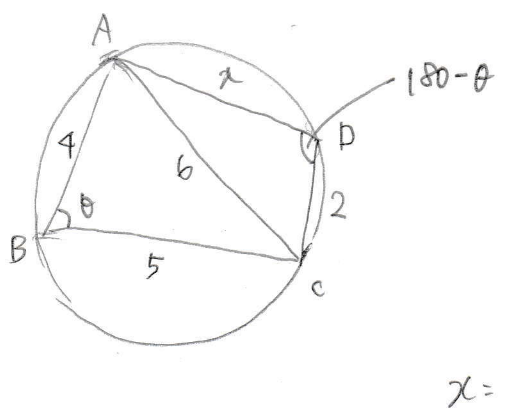
$\cos B = \dfrac{1}{8}$

$\cos B = \dfrac{1}{8}$ より $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = \dfrac{63}{64}$　$\sin B > 0$ より　$\sin B = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

正弦定理より外接円の半径 R とすると

$2R = \dfrac{6}{\sin B} = \dfrac{\cancel{48}\,16}{\cancel{3}\sqrt{7}} = \dfrac{16\sqrt{7}}{7}$　$\therefore R = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

∴ 円の面積は $\left(\dfrac{8\sqrt{7}}{7}\right)^2 \pi = \dfrac{64}{7}\pi$



△ADC で余弦定理 DA=x とすると

$36 = x^2 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot x \cos(180 - \theta)$

$36 = x^2 + 4 + 4x \cos\theta$　$\cos\theta = \cos B = \dfrac{1}{8}$ より

$x^2 + \dfrac{1}{2}x - 32 = 0$ より

$2x^2 + x - 64 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-64)}}{4}$　$x > 0$ より　$x = \dfrac{-1 + 3\sqrt{57}}{4}$

$DA = \dfrac{-1 + 3\sqrt{57}}{4}$