正余29

三角形ABCがあり，その辺AB, BC, CAの長さはそれぞれ9, 6, 5とする。また，辺AB, BC, CA上にはそれぞれ点D, E, Fがあり，AD, BE, CFの長さはすべて等しく，その値がaであるとする。このとき，

(1) 三角形ABCの面積は $\boxed{}\sqrt{2}$ である。

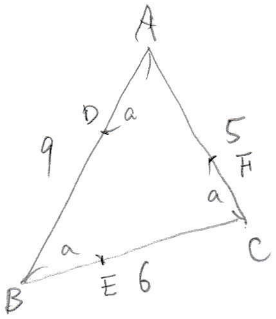
(2) $\angle\mathrm{ABC} = B$ とすれば，$\cos B = \dfrac{\boxed{}}{27}$ である。

(3) BDとBEの長さが等しくなるようにaを決めると，DEの長さは $\sqrt{\boxed{}}$ になる。

(4) $a = \dfrac{\boxed{}}{16}$ であれば，$\angle\mathrm{ADF}$が直角になる。

(5) $a = 2$ ならば，三角形CFEの面積は $\dfrac{\boxed{}\sqrt{2}}{3}$ になる。

〔東北工業大〕



(1) 余弦定理より $\angle B=\theta$ とすると

$25=81+36-2\cdot 9\cdot 6\cos\theta$

$108\cos\theta=92 \quad \cos\theta=\dfrac{23}{27}$

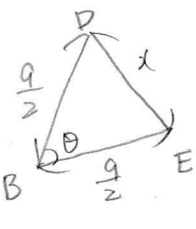
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{23}{27}\right)^2=\dfrac{200}{27^2}$ 　$\sin\theta>0$より

$\sin\theta=\dfrac{10\sqrt{2}}{27}$

面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 6\cdot\dfrac{10\sqrt{2}}{27}=10\sqrt{2}$ 　$\underline{10\sqrt{2}}$

(2) (1)より $\underline{\cos B=\dfrac{23}{27}}$

(3) $BD=9-a$ 　$BE=a$より 　$9-a=a$ 　$a=\dfrac{9}{2}$



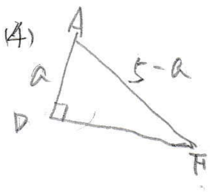
DE=xとして余弦定理

$x^2=\dfrac{81}{4}+\dfrac{81}{4}-2\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{9}{2}\cos B$

$x^2=\dfrac{81}{2}-\cancel{2}\cdot\dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{9}}{2}\cdot\dfrac{23}{\cancel{27}_{3}}$

$=\dfrac{81}{2}-\dfrac{69}{2}=6$ 　$x>0$ 　$x=\sqrt{6}$ 　$\underline{DE=\sqrt{6}}$

(4)



$36=81+25-2\cdot 9\cdot 5\cos A$ 　$90\cos A=70$ 　$\cos A=\dfrac{7}{9}$

$DF^2=a^2+(5-a)^2-2a(5-a)\cdot\dfrac{7}{9}$ 　三平方の定理より，

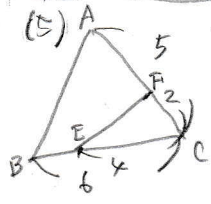
$DF^2+a^2=(5-a)^2$ であるから 　$2a^2-2a(5-a)\cdot\dfrac{7}{9}=0$

$18a^2-14a(5-a)=0$

$32a^2-70a=0$, $2a(16a-35)=0$

$0<a<5$より 　$\underline{a=\dfrac{35}{16}}$

(5)



$\dfrac{2\times 4}{6\times 5}\triangle ABC$

$=\dfrac{4}{15}\cdot 10\sqrt{2}=\underline{\dfrac{8}{3}\sqrt{2}}$