IA正弦余弦28

加法定理より

四角形 ABCD は半径 $\sqrt{14}$ の円に内接し, $\angle DBC = 45°$, $\angle BCD = 120°$, AB=3AD である。このとき, 次の問いに答えなさい。

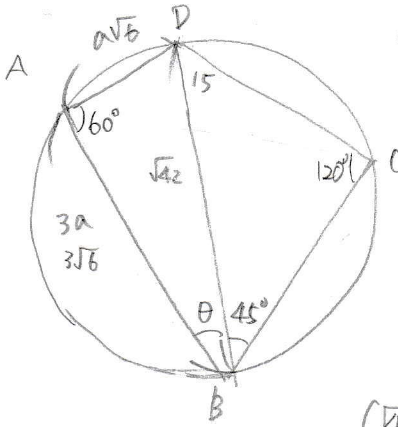
(1) BD の長さを求めよ。

(2) AD の長さを求めよ。

(3) $\sin\angle ABD$ を求めよ。

(4) AC の長さを求めよ。

〔標準問題〕



(1) $\dfrac{BD}{\sin 120} = 2\sqrt{14}$

$\dfrac{2BD}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{14}$ ∴ $BD = \sqrt{42}$

(2) 内接四角形の性質より $\angle BAD = 60°$

$\triangle ADB$で $AD = a$ $AB = 3a$として余弦定理を用いると

$(\sqrt{42})^2 = a^2 + (3a)^2 - 2\cdot a\cdot 3a\cdot\cos 60°$

$42 = a^2 + 9a^2 - 3a^2 \rightarrow 7a^2 = 42$ $a^2 = 6$ $a > 0$より $a = \sqrt{6}$ ∴ $AD = \sqrt{6}$

ちなみに $AB = 3\sqrt{6}$.

(3) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\angle ABD} = 2\sqrt{14}$ より $\sin\angle ABD = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ ∴ $\sin\angle ABD = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$

(4)

$\angle ABD = \theta$とすると

$\dfrac{AC}{\sin(\theta + 45°)} = 2\sqrt{14}$ ∴ $AC = 2\sqrt{14}\sin(\theta + 45°)$ …① ①は加法定理より

$AC = 2\sqrt{14}(\sin\theta\cos 45 + \sin 45\cos\theta)$ ∵ $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$

$= 2\sqrt{14}\left(\dfrac{\sqrt{21}}{14}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right) = \dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot 1}{\cancel{14}_{7}\cdot\cancel{\sqrt{2}}} + \dfrac{\cancel{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{7}}\cdot 5\cdot\cancel{\sqrt{7}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{14}}$

$= \sqrt{3} + 5$

∴ $5 + \sqrt{3}$