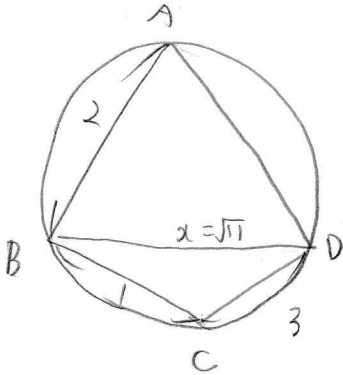


円周法 26

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ であり、 $\cos \angle BCD = -\frac{1}{6}$

とする。このとき、 $AD = \boxed{\text{ア}}$ であり、四角形 ABCD の面積は $\frac{3\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{4}$ である。

[早稲田大]



$BD=x$ とし

$\triangle BCD$ に余弦定理を用いると

$$x^2 = 1 + 9 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$x^2 = 11 \quad BD = \sqrt{11}$$

$\angle BCD = \theta$ とおくと $\angle BAD = 180^\circ - \theta$ より

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad \text{より}$$

$$\cos \angle BAD = -\cos \angle BCD = \frac{1}{6}$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を用いると $AD=y$ とし

$$11 = 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \rightarrow y^2 - \frac{2}{3}y - 7 = 0$$

$$3y^2 - 2y - 21 = 0 \quad (y-3)(3y+7) = 0 \quad y > 0 \text{ より } y = 3$$

$$\frac{1}{3} \times -3 \rightarrow -9$$

$$\frac{1}{3} \times 7 \rightarrow -$$

$$\text{より } AD = 3 \quad \text{ア}$$

$$\cos \angle BCD = -\frac{1}{6} \quad \text{より} \quad \sin^2 \angle BCD = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \quad \sin \angle BCD > 0 \quad \text{より}$$

$$\sin \angle BCD = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

同様に

$$\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{35}}{6} \quad \text{より}$$

四角形 ABCD = $\triangle ABD + \triangle BCD$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{4}$$

$$\therefore \text{四角形 ABCD} = \frac{\sqrt{35}}{2} + \frac{\sqrt{35}}{4} = \frac{3\sqrt{35}}{4} \quad \text{イ}$$