正弦余弦 24

半径 $2\sqrt{2}$ の円に内接する鋭角三角形 ABC があり, $\angle A = 45^\circ$ で, BC : CA=$\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$ であるという。

(1) BC= $\square$ である。

(2) $\angle B = \square^\circ$, $\angle C = \square^\circ$ であり, AB= $\square\sqrt{\square} + \square$ である。

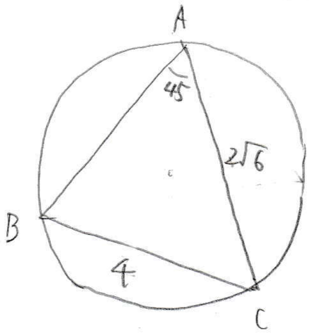
(3) 三角形 ABC の面積は $\square\sqrt{\square} + \square$ である。

(4) 三角形 ABC の内接円の半径 r は $t = \sqrt{2} + 1$ とおくとき

$$\frac{\square\left(1+\sqrt{\square}\right)}{t+\sqrt{\square}}$$

と表され, $r = \sqrt{\square} - \sqrt{\square} + \square$ となる。

〔東京理科大〕



(1) $\dfrac{BC}{\sin 45^\circ} = 2\cdot 2\sqrt{2}$ より $BC = 4$

(2) $4 : AC = \sqrt{2} : \sqrt{3}$ より $AC = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

$\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin B} = 2\cdot 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos B$ より

$0^\circ < \angle B < 90^\circ$ より $\angle B = 30^\circ$ $\quad \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 105^\circ$

(3) $\dfrac{AB}{\sin 105^\circ} = 4\sqrt{2}$ となるので, ここで → $\cos 105^\circ = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin^2 105 = 1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}$ として

$\sin^2 105 = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{8}$ より $\sin 105 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore AB = 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}+2$

(4) $\dfrac{1}{2}r(4+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}+2) = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot 2\cancel{\sqrt{6}}^{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\cancel{2\sqrt{2}}}$

$r(3+\sqrt{6}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$r\{3+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)\} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

$r(3+\sqrt{3}t) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ より $r = \dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3+\sqrt{3}t} = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+t}$

$\dfrac{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-t)}{(\sqrt{3}+t)(\sqrt{3}-t)}$

$= \dfrac{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{3-(\sqrt{2}+1)^2}$

$= \dfrac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}+1$