正弦 余弦 21

四面体 OABC において

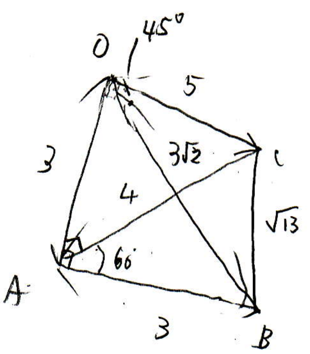
$$OA=AB=3,\ OC=5,\ CA=4,\ \angle OAB = 90^\circ,\ \angle BOC = 45^\circ$$

とする。

1. BC の長さを求めよ。
2. $\sin\angle BAC$ の値を求めよ。
3. 四面体 OABC の体積を求めよ。

〔岡山理科大〕

(1)



直角二等辺三角形の辺の比 $1:1:\sqrt{2}$ より

$OB=3\sqrt{2}$ △OBCで余弦定理を使うと

$BC^2=(3\sqrt{2})^2+5^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 5\cos 45^\circ$

$=18+25-30$

$BC^2=13$ $BC>0$ より $\underline{BC=\sqrt{13}}$

(2)

△ABCで余弦定理を使うと $\angle BAC=\theta$ として.

$13=16+9-2\cdot 3\cdot 4\cos\theta$

$13=25-24\cos\theta$ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $0<\theta<180^\circ$ より $\theta=60^\circ$

(3)

△OACが3:4:5であることから $\angle OAC=90^\circ$ ∴ $OA\perp$ △ABC

△ABCの面積は $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sin\theta$ $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ $\cos\theta$ は(2)より $\frac{1}{2}$ であるから

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ 面積は $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

従って求める体積は

$$3\sqrt{3}\times OA\times\frac{1}{3}=3\sqrt{3}\times 3\times\frac{1}{3}=3\sqrt{3}$$

$\underline{3\sqrt{3}}$