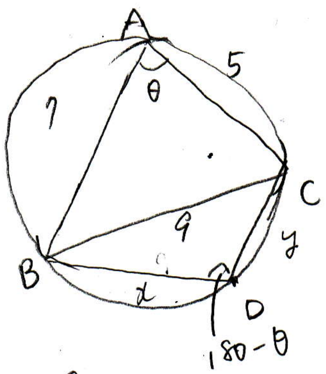
1A 正弦余弦 20

△ABC の 3 辺の長さを AB=7, BC=9, CA=5 とする。このとき $\sin\angle\text{BAC} = \boxed{}$ となり, △ABC の外接円の半径は $R = \boxed{}$ となる。次に, 外接円の弧 BC 上に点 D をとる (弧 BC は点 A を含まないとする)。このとき, $\cos\angle\text{BDC} = \boxed{}$ である。BD$= x$, CD$= y$ とすると, $5x^2 + 5y^2 - xy = \boxed{}$ である。一方, 任意の実数 X, Y について, $5X^2 + 5Y^2 - XY = a(X+Y)^2 + b(X-Y)^2$ が成立するような正の定数 a, b は $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ である。したがって, $x + y$ の最大値は $\boxed{}$ である。

〔同志社大〕



$\cos\angle BAC = \cos\theta$ とすると 余弦定理より

$81 = 25 + 49 - 2\cdot 7\cdot 5\cos\theta$

$70\cos\theta = -7 \quad \cos\theta = -\frac{1}{10}$

ここで

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから $\sin^2\theta = \frac{99}{100}$ $\sin\theta > 0$ より

$\sin\theta = \frac{3\sqrt{11}}{10}$

$\frac{9}{\sin\angle BAC} = 2R$ より $\quad \frac{9}{\frac{3\sqrt{11}}{10}} = 2R \quad \frac{15}{\sqrt{11}} = R$

$\therefore R = \frac{15\sqrt{11}}{11}$

$\cos\angle BDC = \cos(180 - \angle BAC) = -\cos\angle BAC = \frac{1}{10}$

$\therefore \cos\angle BDC = \frac{1}{10}$

△BDC で余弦定理を用いると

$81 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\underbrace{\angle BDC}_{\frac{1}{10}}$

$81 = x^2 + y^2 - \frac{1}{5}xy \rightarrow$ 両辺 5 倍して

$5x^2 + 5y^2 - xy = 405$

$\therefore 405$

$a(X+Y)^2 + b(X-Y)^2 = (a+b)X^2 + (2a-2b)XY + (a+b)Y^2$

より $\begin{cases} a+b=5 \\ 2a-2b=-1 \end{cases}$ を解いて $a = \frac{9}{4}$ $b = \frac{11}{4}$

$\frac{9}{4}(x+y)^2 + \frac{11}{4}(x-y)^2 = 405$

$\frac{9}{4}(x+y)^2 = -\frac{11}{4}(x-y)^2 + 405$

$(x+y)^2 = -\frac{11}{9}(x-y)^2 + 180$

$\therefore x = y$ のとき 最大値 $6\sqrt{5}$ $(\sqrt{180})$ となる。