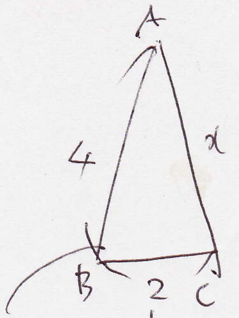
△ABC に余弦定理を用いる.



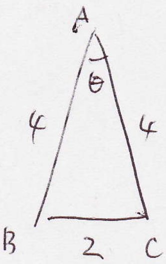
$\cos\angle ABC = \frac{1}{4}$

$x^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4}$

$= 16 + 4 - 4$

$= 16$

$x = 4 \qquad CA = 4$



$\angle BAC = \theta$ とする

$2^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot4\cdot4\cos\theta$

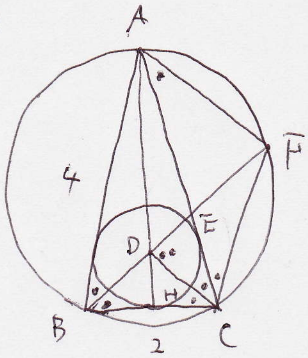
$4 = 16 + 16 - 32\cos\theta$

$32\cos\theta = 28$

$\cos\theta = \frac{7}{8}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = \frac{15}{64}$ $\quad \sin\theta > 0$ より $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$

(1)



$AE : EC = AB : BC = 2 : 1$ (角の二等分線比)

よって $AE = \frac{2}{3}AC = \frac{8}{3}$

$BE^2 = 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}$

$= \frac{40}{9}$ $\qquad BE > 0$ より $\quad BE = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

$BD : DE = AB : AE = 4 : \frac{8}{3} = 3 : 2$ (角の二等分線比)

よって $BD = \frac{3}{5}BE = \frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

(2) $\triangle EBC : \triangle EAF = BE : AE = \frac{2\sqrt{10}}{3} : \frac{8}{3} = \sqrt{10} : 4$ (相似比)

よって面積比は $(\sqrt{10})^2 : 4^2 = 5 : 8$ より $\frac{5}{8}$

(3) 左上図より △AFC は FA = FC，△FDC は FD = FC の

二等辺三角形 よって

FA = FC = FD