正弦余弦 19

四面体 ABCD がある。辺 AB の長さを 3, 辺 AC の長さを 4, 辺 AD の長さを 2 とし, $\angle$BAC, $\angle$CAD, $\angle$DAB がすべて 90° であるとする。次の問いに答えよ。

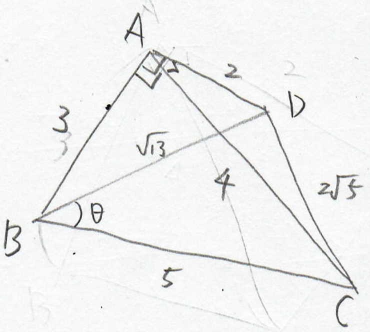
(1) $\cos\angle \mathrm{DBC}$ を求めよ。

(2) $\triangle$BCD の面積を求めよ。

(3) A から $\triangle$BCD におろした垂線が $\triangle$BCD と交わる点を H としたとき, AH の長さを求めよ。

〔中部大〕

(1)



三平方の定理より

$BD = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$DC = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{9+16} = 5$

$\triangle DBC$ で $\angle DBC = \theta$ として余弦定理を用いると

$(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{13})^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot\sqrt{13}\cos\theta$

$20 = 13 + 25 - 10\sqrt{13}\cos\theta$

$10\sqrt{13}\cos\theta = 18$

$\cos\theta = \dfrac{9}{5\sqrt{13}}$

$\therefore \cos\angle DBC = \dfrac{9}{5\sqrt{13}}$

(2)

$\sin\angle DBC = \sqrt{1-\cos^2\angle DBC} = \sqrt{1-\dfrac{9\cdot 9}{25\cdot 13}}$

$\triangle BCD$の面積 $= \dfrac{1}{2}\sqrt{13}\cdot 5\cdot\sqrt{1-\dfrac{9\cdot 9}{25\cdot 13}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{13\cdot 25 - 9\cdot 9}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{61}$

$\therefore \sqrt{61}$

(3)

四面体の体積 $= 3\times 2\times\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{3}$ ←(底面積$\triangle ABD$として)

$= 4$

$\triangle BCD$を底面としたときの高さがAHなので

$\sqrt{61}\times AH\times\frac{1}{3} = 4$

$\therefore AH = \dfrac{12}{\sqrt{61}}$