1月　正弦余弦 17

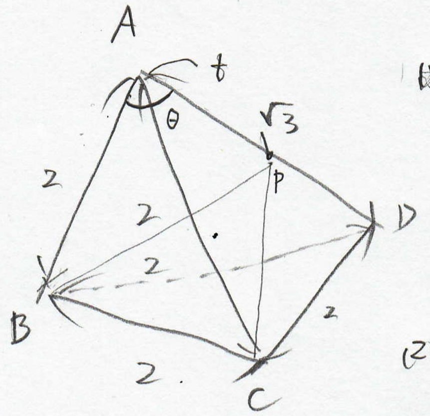
四面体 ABCD において, AB=BC=CA=DB=DC=2, AD= $\sqrt{3}$ とし, P を辺 AD 上の点とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle PAB = \theta$ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 線分 AP の長さを $t(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$ とするとき, 線分 BP の長さを t を用いて表せ。

(3) 三角形 PBC の面積を t を用いて表せ。

〔岐阜大〕



(1) △ABDで余弦定理を用いると

$4 = 4 + 3 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cos\theta$

$3 = 4\sqrt{3}\cos\theta$　　$\cos\theta = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) △ABPでAP=tとして余弦定理を用いる.

$BP^2 = 4 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cos\theta$

$= t^2 - \sqrt{3}t + 4$　　BP>0より　$BP = \sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 4}$

(3) また△BPCはBP=CPの二等辺三角形(図形の対称性より)　△BPCで余弦定理を用いて

$\cancel{t^2+\sqrt{3}t+4} = t^2 + \sqrt{3}t + 4 + 4 - 2 \cdot \sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 4} \cdot 2\cos\angle PBC$

$\cos\angle PBC = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 4}}$　　$\therefore \sin\angle PBC = \sqrt{\frac{t^2 - \sqrt{3}t + 3}{t^2 - \sqrt{3}t + 4}}$

従って、三角形PBCの面積は

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 4} \cdot \sqrt{\frac{t^2 - \sqrt{3}t + 3}{t^2 - \sqrt{3}t + 4}}$

$= \sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 3}$

$\sqrt{t^2 - \sqrt{3}t + 3}$