16

三角形 ABC において, AB= $\sqrt{2}$, $\angle A = 135°$, $\angle C = 30°$ とする。この三角形の外接円の中心を O とし, 線分 AO の延長線とこの外接円との交点を D とする。

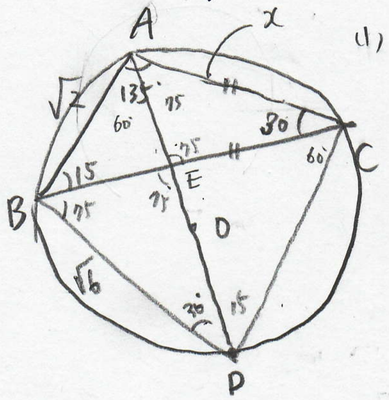
(1) AD, BC, BD の長さは AD= $\boxed{}\sqrt{\boxed{}}$, BC= $\boxed{}$, BD= $\sqrt{\boxed{}}$ である。

(2) 辺 AC の長さは AC= $\sqrt{\boxed{}} - \boxed{}$ である。

(3) 四角形 ABOC の面積を S_1, 四角形 ABCD の面積を S_2 とおくと

$$S_1 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}\left(\sqrt{\boxed{}} + \boxed{}\right),\ \frac{S_2}{S_1} = \boxed{}$$

〔北海道薬科大〕



(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30} = 2R$ (Rは外接円の半径)

$2\sqrt{2} = 2R$ より $R = \sqrt{2}$ ∴ $AD = 2R = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30} = \dfrac{BC}{\sin 135}$ より

$2\sqrt{2} = \sqrt{2}\,BC$ ∴ $BC = 2$

$BD = \sqrt{6}$ … $\triangle ADB$ が $30°\,60°\,90°$ の直角三角形

(2) $AC = x$ とおいて 余弦定理

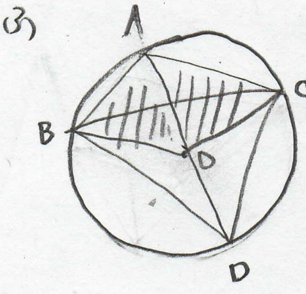
$2 = x^2 + 4 - 2 \cdot x \cdot 2\cos 30 \longrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$

$(x-\sqrt{3})^2 - 3 + 2 = 0$

$(x-\sqrt{3})^2 = 1$ $x = \sqrt{3} \pm 1$ $x < 2$ より

$x = \sqrt{3} - 1$

(3)



四角形 ABOC (S_1)

$= \triangle ABC + \triangle BOC$

$= \dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot 2 \cdot \sin 30 + \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + 1$ ∴ $S_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

S_2 は上図より $2 \times$ 四角形 ABOC ← ($\triangle ABO = \triangle BOD$, $\triangle ACO = \triangle COD$)

∴ $\dfrac{S_2}{S_1} = 2$