Oを中心とし半径rの円に内接する四角形ABCDがあり，辺AB=3, BC=1, および$\angle B=120^\circ$とする。

(1) 対角線ACはAC=$\sqrt{\boxed{}}$である。

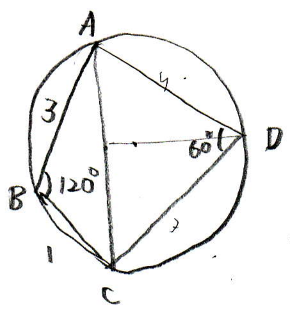
(2) 円の半径rは$r=\dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{3}$である。

(3) 三角形ABCの面積は$\dfrac{\boxed{}}{4}$である。

(4) $\angle D=\boxed{}^\circ$である。

(5) 四角形ABCDの面積の最大値は$\boxed{}$である。

〔東北工業大〕



(1) AC=xとすると余弦定理より

$x^2=9+1-2\cdot1\cdot3\cos120^\circ$

$x^2=10+3=13$　$x>0$より　$x=\sqrt{13}$　$\underline{AC=\sqrt{13}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sin120}=2r$　R は△ABCの外接円の半径

∴ $\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=2r$　$r=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　$\underline{\dfrac{\sqrt{39}}{3}}$

(3) △ABCの面積Sは　$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\sin120=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{27}}{4}}$

(4) $\angle D=60^\circ$

(5) 上図のように△ACDの面積が最大になることを考えると底辺AC=$\sqrt{13}$が一定であることから高さが最大であればよい。高さが最大ということはACの中点を通り垂直な直線と円の交点のうち点Bと反対側にある点をDとするときでこのとき△ACDは AD=CDの二等辺三角形となる

AD=CD=xとおくと余弦定理より

$13=x^2+x^2-2x^2\cos60^\circ$

$x^2=\sqrt{13}$　$x>0$　$x=\sqrt{13}$で

△ACDは1辺が$\sqrt{13}$の正三角形となる。

∴求める面積の最大値は　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{13})^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}+\dfrac{13\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$　$\underline{4\sqrt{3}=\sqrt{48}}$