ごうかく!

正弦余弦 14

△ABCにおいて, AB=2, AC=3, $A=60^\circ$ のとき, 辺AC上にAD=1となる点Dをとる。さらにEを辺BC上の点とする。

(1) 辺BCの長さを求めよ。

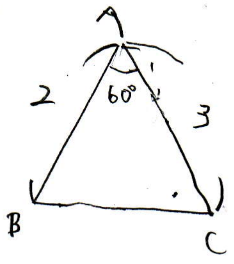
(2) 線分DEが△ABCの面積を二等分するとき, 線分BEの長さを求めよ。

(3) △ABEと△DECの面積 T を最大にする線分BEの長さと, そのときの T の値を求めよ。

の積

〔千葉大〕

(1)

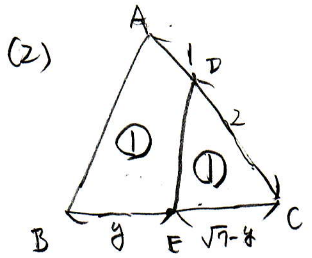


BC $=x$ とおくと 余弦定理より

$$x^2=4+9-2\cdot2\cdot3\cos60^\circ$$
$$=13-6$$
$$=7 \qquad x>0 \text{ より } \quad x=\sqrt{7}$$

$\underline{\sqrt{7}}$

(2)



BE $=y$ として EC $=\sqrt{7}-y$ とおくと

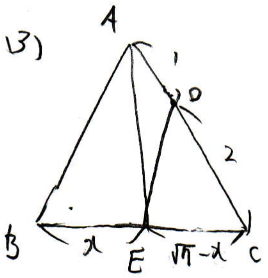
$2(\sqrt{7}-y):3\sqrt{7}=1:2$ とならなければない

これを解くと

$$3\sqrt{7}=4\sqrt{7}-4y$$
$$4y=\sqrt{7}$$
$$y=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\underline{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

(3)



$\triangle ABC=S$ として BE $=x$ として考えると

$$\triangle ABE=\frac{x}{\sqrt{7}}S$$

$$\triangle DEC=\frac{\sqrt{7}-x}{\sqrt{7}}\times\frac{2}{3}\times S=\frac{2\sqrt{7}-2x}{3\sqrt{7}}S$$

$$T=\triangle ABE\cdot\triangle DEC=\frac{x(2\sqrt{7}-2x)}{21}S^2$$

$$T=\left(\frac{-2x^2+2\sqrt{7}x}{21}\right)S^2$$ となり 分母 $-2x^2+2\sqrt{7}x$ が最大とならなければない

$\therefore$ $-2x^2+2\sqrt{7}x=-2\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$ となり

$x=\frac{\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\frac{7}{2}$ をとることが分かる ここで△ABCの面積Sは $S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin60^\circ$ より

$S=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ より Tの最大値は $\dfrac{\frac{7}{2}}{21}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{8}$

$\therefore$ BE $=\frac{\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\frac{9}{8}$ となる

ごうかく!