正弦余弦 12

四角形 ABCD において, AB=4, BC=5, CD= t, DA= $3-t$ $(0<t<3)$ とする。四角形 ABCD は外接円を持つとする。つぎの各問いに答えよ。

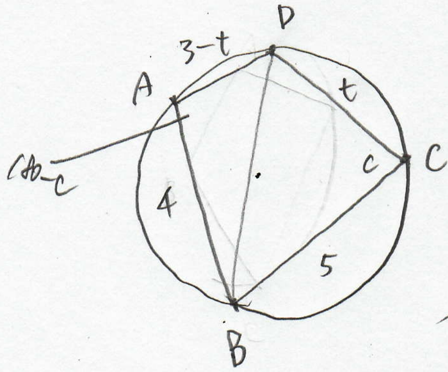
(1) $\cos C$ を t で表わせ。

(2) 四角形 ABCD の面積 S を t で表わせ。

(3) S の最大値と, そのときの t の値を求めよ。

〔名古屋大〕

(1)



$DB^2 = t^2 + 25 - 2\cdot5\cdot t\cos C$ …①

$DB^2 = (3-t)^2 + 16 - 2\cdot4\cdot(3-t)\cos(180-C)$ …②

①, ② が等しいので

$t^2+25-10t\cos C = (3-t)^2+16+8(3-t)\cos C$

$\cancel{t^2}+25-10t\cos C = 9-6t+\cancel{t^2}+16+8(3-t)\cos C$

$(-24-2t)\cos C = -6t$

$\therefore \cos C = \dfrac{3t}{12+t}$

(2) $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C}$

$= \sqrt{1-\dfrac{9t^2}{(12+t)^2}}$

$S = \triangle ABD + \triangle BDC$

$= \dfrac{1}{2}\cdot(3-t)\cdot4\sqrt{1-\dfrac{9t^2}{(12+t)^2}} + \dfrac{1}{2}\cdot5\cdot t\sqrt{1-\dfrac{9t^2}{(12+t)^2}}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{9t^2}{(12+t)^2}}\cdot(12-4t+5t) = \dfrac{1}{2}(12+t)\sqrt{1-\dfrac{9t^2}{(12+t)^2}}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{(12+t)^2-9t^2}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{8(3+t)(6-t)}$ $\quad\therefore S = \sqrt{2(3+t)(6-t)}$ //

(3) (2) のとき

$S = \sqrt{-2t^2+6t+36}$

$= \sqrt{-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{81}{2}}$

$\therefore$ $t=\dfrac{3}{2}$ のとき 最大値 $\dfrac{9}{\sqrt2} = \dfrac{9\sqrt2}{2}$ となる //