正弦余弦 10

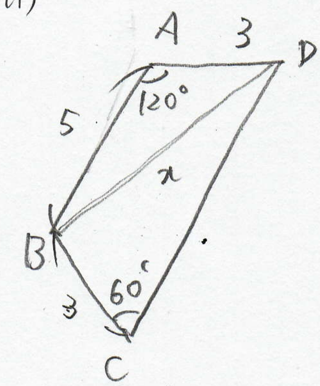
四角形 ABCD において，AB=5, BC=3, AD=3, $\angle \mathrm{BAD} = 120^\circ, \angle \mathrm{BCD} = 60^\circ$ とする。

(1) BD の長さを求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

〔広島工大〕

(1)



BD$=x$として余弦定理を使うと

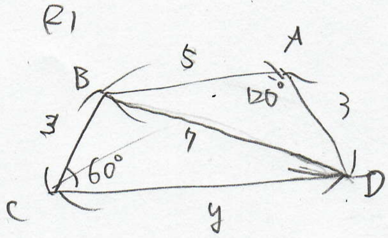
$$x^2 = 25+9-2\cdot 5\cdot 3\cos 120^\circ \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 34+15$$

$$= 49$$

$x>0$ より $x=7$

(2)



CD$=y$として(1)同様に求めると

$$49 = y^2+9-2\cdot 3\, y\cos 60$$

$$49 = y^2+9-3y$$

$$-y^2+3y+40=0$$

$$y^2-3y-40=0$$

$$(y-8)(y+5)=0$$

$y>0$ より $y=8$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdots ①$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot \sin 60$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \cdots ②$$

四角形 ABCD = △ABD + △BCD であるから

①，② より

$$\frac{39\sqrt{3}}{4}$$