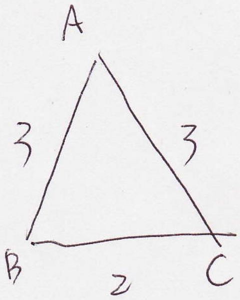
△ABC において, AB=AC=3, BC=2 であるとき

$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \sin\angle ABC = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

であり, △ABC の面積は $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$, △ABC の内接円 I の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$ である。

また, 円 I の中心から点 B までの距離は $\dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ である。

〔次のページに続く〕



余弦定理

$\cos\angle ABC = \cos\theta$ とすると

$$9 = 9 + 4 - 2\cdot 2\cdot 3\cos\theta$$

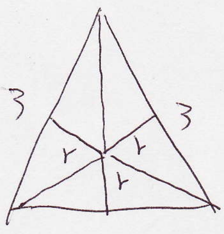
$$\cos\theta = \frac{1}{3}\ \left(\frac{ア}{イ}\right)$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \quad \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \qquad \sin\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \sin\theta > 0 \text{ より}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ \left(\frac{ウエ}{オ}\right)$$

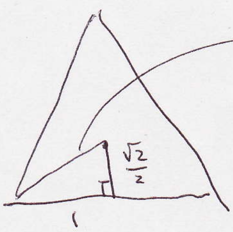
面積(△ABC)

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}\ (カ,キ)$$



$$\frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 2r = 4r = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(\frac{ク}{ケ}\right)$$



$$\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ \left(\frac{コ}{サ}\right)$$

(1) 辺AB上の点Pと辺BC上の点Qを, BP=BQかつPQ= $\frac{2}{3}$ となるようにとる。このとき, △PBQの外接円Oの直径は $\frac{\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ であり, 円Iと円Oは $\boxed{セ}$。ただし, $\boxed{セ}$ には次の⓪～④からあてはまるものを一つ選べ。

⓪ 重なる(一致する)　　① 内接する

② 外接する　　③ 異なる2点で交わる

④ 共有点をもたない

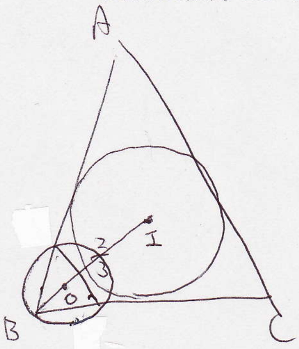
(2) 円I上に点Eと点Fを, 3点C, E, Fが一直線上にこの順に並び, かつ, CF= $\sqrt{2}$ となるようにとる。このとき

$$CE=\frac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}},\quad \frac{EF}{CE}=\boxed{チ}$$

である。

さらに, 円Iと辺BCとの接点をD, 線分BEと線分DFとの交点をG, 線分CGの延長線と線分BFとの交点をMとする。このとき, $\frac{GM}{CG}=\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

〔12センター第3問〕



$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=2R$ より $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{シ}{ス}\right)$

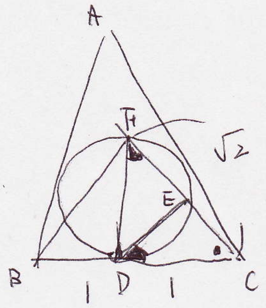
$BO=\frac{\sqrt{2}}{4}$　$BI=\frac{\sqrt{6}}{2}$ より $OI=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$l_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ (円Oと円Iの半径の差)

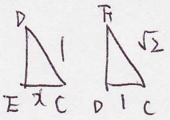
$OI-l_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$

$l_2=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ (円Oと円Iの半径の和)　$l_2-OI=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{2}>0$

よって $l_1<OI<l_2$ これより 3 (セ)



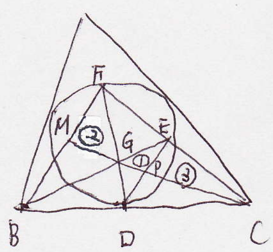
△DCE ∽ △FCD



$x:1=1:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}x=1$　$x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=CE$ これより $EF=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって $CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ソタ), $\frac{EF}{CE}=1$ (チ)



EDとCGの交点をPとする

中点連結定理より

$ED:BF=1:2=PG:GM$

また $CP:PM=1:1$ より $GM:CG=2:4=1:2$

よって $\frac{GM}{CG}=\frac{1}{2}\left(\frac{ツ}{テ}\right)$