整数 17

nを奇数とする。次の問いに答えなさい。

(1) n^2-1は8の倍数であることを証明せよ。

(2) n^5-nは3の倍数であることを証明せよ。

(3) n^5-nは120の倍数であることを証明せよ。

〔千葉大〕

(1)

与式 $=(n+1)(n-1)$　　$n=2m+1$とすると（∵mは整数）

$=(2m+2)\cdot 2m$

$=4m(m+1)$

$m(m+1)$は連続する2数の積より偶数

よって8の倍数になる

(2)

与式 $=n(n^4-1)$

$=n(n^2+1)(n^2-1)$

$=n(n+1)(n-1)(n^2+1)$　(1)同様 $n=2m+1$とすると（∵mは整数）

$=(2m+1)(2m+2)\cdot 2m\cdot(4m^2+4m+2)$

$=\underline{2m\cdot(2m+1)(2m+2)}(4m^2+4m+2)$ …①

①の下線部は連続する3つの整数となるので3の倍数を含む

よって①は3の倍数である、ゆえにこれは3の倍数である

(3) n^5-nは(2)の①より

$2m(2m+1)(2m+2)\{(2m-1)(2m+3)+5\}$

$=\underline{(2m-1)2m\cdot(2m+1)(2m+2)(2m+3)}+10m(2m+1)(2m+2)$ …②

②の下線部は連続する5つの整数の積なので5の倍数

$10m(2m+1)(2m+2)$も5の倍数である. (1)(2)より n^5-nは24の倍数であるから、これとあわせて120の倍数である