(1) n が整数のとき, $(n^5-n)-5(n^3-n)$ が 5 の倍数であることを示せ。

(2) n が整数のとき, n^5-n が 30 の倍数であることを示せ。

一般に m が 2 以上の整数のとき, 連続する m 個の整数の積が m の倍数であることは成り立つ。このことは証明なしに使ってよい。

〔京都教育大〕

(1)

$(n^5-n)-5(n^3-n)$

$=n(n^4-1)-5n(n^2-1)$

$=n(n^2+1)(n^2-1)-5n(n^2-1)$

$=n(n^2-1)(n^2-4)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

連続する5つの整数の積なので 5の倍数である

(2) (1)より

$\{(n^5-n)-5(n^3-n)\}+5(n^3-n)$

$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ には 2, 3, 5 の倍数が

最低1つは含まれるので 30の倍数になる

$5(n-1)n(n+1)$ の $(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの整数の積

なので 6の倍数となるから $5(n-1)n(n+1)$ も 30の倍数

つまり

n^5-n が30の倍数である