三角比6

三角形ABCがあり, $\angle A = 120°$ とする。また, 各辺の長さを a =BC, b =CA, c =AB としたとき, 2次方程式 $kx^2 - 4x + 1 = 0$ の解が b, c であるという。
ただし, k は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) a を k で表せ。

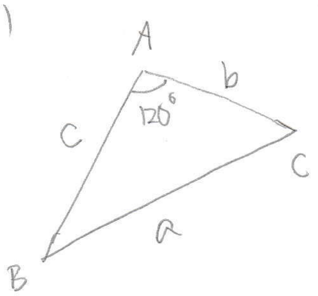
(2) 三角形ABCの面積を k で表せ。

(3) 三角形ABCの面積が1のとき, a^2 を求めよ。

〔東京電機大〕

2次方程式の解は正の数であることから
判別式 $D/4 \geqq 0$
$4 - k \geqq 0$　$k \leqq 4$
$b + c = \frac{4}{k} > 0$　$k > 0$
$bc = \frac{1}{k} > 0$
$\} \ 0 < k \leqq 4$ とする

(1)



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120°$

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$ …①

また2次方程式の解と係数の関係より

$b + c = \frac{4}{k}$　$bc = \frac{1}{k}$ であるから、①を次のように変形する

$a^2 = (b+c)^2 - bc$ より　$a^2 = \left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{k}$　$a > 0$ であるから

$a = \sqrt{\frac{16}{k^2} - \frac{1}{k}}$

(2) △ABCの面積をSとすると

$S = \frac{1}{2} bc \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4k}$

(3) (2)より $\frac{\sqrt{3}}{4k} = 1$ であるから　$k = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore a^2 = \frac{256}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}(64 - \sqrt{3})$

$\therefore a^2 = \frac{4}{3}(64 - \sqrt{3})$