1A 三角比 5

αを実数とし, $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$をみたすものとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$の値を求めよ。

(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, および$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$の値を求めよ。

(3) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$のとりうる値を全て求めよ。

〔岐阜大〕

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{9}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+1=\dfrac{1}{9}$ → $2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{8}{9}$

$\therefore$ $\underline{\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}}$

(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{13}{27}$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$=1^2-2\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)^2=1-\dfrac{32}{81}=\dfrac{49}{81}$

$\therefore$ $\underline{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=\dfrac{13}{27}\quad \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{49}{81}}$

(3) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$ …①

ここで

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha$

$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\dfrac{4}{9}\right)$

$=\dfrac{17}{9}$

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

となり ①は

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)$

$=1\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ $\quad\therefore$ $\underline{\pm\dfrac{\sqrt{17}}{9}}$