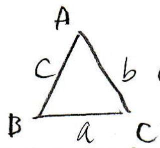
1A 三角比 4



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $\qquad \dfrac{a}{\sin A} = 2k$

△ABC の 3 つの角 ∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ A, B, C とし，それらの角の対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。次の問に理由とともに答えよ。

(1) △ABC が $\sin A + \cos \cancel{B} A = 1$ をみたすとき，△ABC はどのような三角形であるか。

(2) △ABC が $a \sin A = b \sin B$ をみたすとき，△ABC はどのような三角形であるか。

(3) △ABC が $2\cos B \cdot \sin C = \sin A$ をみたすとき，△ABC はどのような三角形であるか。

〔宮城教育大〕

(1) 正弦 余弦でやろうと思ったがムリッポかったーので

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より $\cos A = 1 - \sin A$ だから

$\sin^2 A + (1 - \sin A)^2 = 1$

$\sin^2 A + 1 - 2\sin A + \sin^2 A = 1$

$2\sin^2 A - 2\sin A = 0$

$2\sin A(\sin A - 1) = 0$

$\sin A = 0$ とすると三角形ができないので不可

∴ $\sin A = 1$ のとき条件を満たす

$0 < A < 180°$ より $\angle A = 90°$

△ABC は $\angle A = 90°$ の直角三角形

(2) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2k$ より $\sin A = \dfrac{a}{2k}$ $\sin B = \dfrac{b}{2k}$ であるから

$a \cdot \dfrac{a}{2k} = b \cdot \dfrac{b}{2k} \to a^2 - b^2 = 0$

$(a+b)(a-b) = 0$ $a + b > 0$ より $a - b = 0$ となればよい

このとき $a = b$ であるから △ABC は BC=AC の二等辺三角形である

(3) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ より $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\sin C = \dfrac{c}{2k}$, $\sin A = \dfrac{a}{2k}$ より 題の等式は次のようになる

$2 \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \dfrac{c}{2k} = \dfrac{a}{2k}$

$\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ka} = \dfrac{a}{2k}$ より 整理すると $c^2 - b^2 = 0$ $(c+b)(c-b) = 0$

$c + b > 0$ より ∴ $c = b$

△ABC は AB = AC の二等辺三角形である