$\triangle$ABCにおいて次の関係がなりたつとき, 3辺 $a:b:c$ の比を求めよ。

$$\underbrace{\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C}_{①},\ \underbrace{\cos A+5\cos B+\cos C=5}_{②}$$

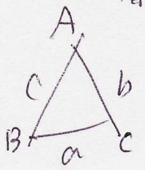
〔自治医大〕

①より

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2+b^2=c^2 \ \cdots ③$$

余弦定理



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

より ②は

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{5(a^2+c^2-b^2)}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=5 \ \cdots ④$$

③より $b^2=c^2-a^2$ であるからこれを④に代入して

$$\frac{c^2-a^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{5(a^2+c^2-c^2+a^2)}{2ac}+\frac{a^2+c^2-a^2-c^2}{2ab}=5$$

$$\frac{-2a^2+2c^2}{2bc}+\frac{10a^2}{2ac}=5$$

$$\frac{-a^2+c^2}{bc}+\frac{5a^2}{ac}=5$$

$$-a^3+ac^2+5a^2b=5abc$$

$$-a(c^2-b^2)+ac^2+5a^2b=5abc$$

$$ab^2+5a^2b=5abc$$

$$ab^2+5a^2b-5abc=0$$

$$ab(b+5a-5c)=0$$

$ab\neq 0$ より

$b+5a-5c=0$ であるから

$b=5c-5a$ これを③に代入すると

$$a^2+(5c-5a)^2=c^2$$

$$a^2+25c^2-50ac+25a^2=c^2$$

$$26a^2-50ac+24c^2=0$$

2で両辺わって

$$13a^2-25ac+12c^2=0$$

$$(a-c)(13a-12c)=0$$

より

$a=c$ または $13a-12c=0$ のときである

$a=c$ のとき ③より $b=0$ となるので不可.

$13a-12c=0$ のとき すなわち $a=\frac{12}{13}c$

③より

$$\frac{144}{169}c^2+b^2=c^2$$

$$b^2=\frac{25}{169}c^2$$

$b>0$ より $b=\frac{5}{13}c$

これより

$$a:b:c=\frac{12}{13}c:\frac{5}{13}c:c$$

よって $a:b:c=12:5:13$