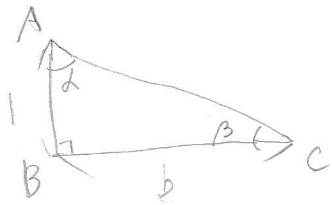
$\angle$B が直角の $\triangle$ABC を考え，AB=1，BC= b とする。$\angle A = \alpha$，$\angle C = \beta$ としたとき，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\cos\beta$ を b で表すと，$\tan\alpha = \boxed{ア}$，$\tan\beta = \boxed{イ}$，$\cos\beta = \boxed{ウ}$ である。一方，$\tan\dfrac{\alpha}{2} = a$ とおいたとき，$\tan\alpha$ を a で表すと，$\tan\alpha = \boxed{エ}$ であるから，$\tan\beta, \cos\beta$ を a で表すと，$\tan\beta = \boxed{オ}$，$\cos\beta = \boxed{カ}$ である。したがって，$\tan\beta + \dfrac{1}{\cos\beta}$ を a で表すと，$\boxed{キ}$ である。 〔東海大〕

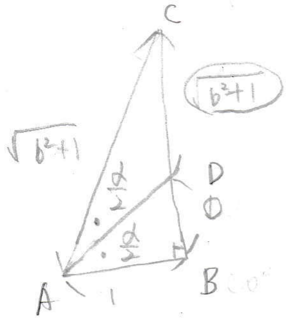


$AC = \sqrt{b^2+1}$

$\tan\alpha = b$ …ア

$\tan\beta = \dfrac{1}{b}$ …イ

$\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}$ …ウ



$\tan\dfrac{\alpha}{2} = a$ より $\tan\dfrac{\alpha}{2} = BD$

$BD = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}+1}$ $\therefore a = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}+1}$

$b = a(\sqrt{b^2+1}+1)$ となり

$b - a = a\sqrt{b^2+1}$

$(b-a)^2 = a^2(b^2+1)$

$b^2 - 2ab + a^2 = a^2b^2 + a^2$

$b^2(1-a^2) - 2ab = 0$

$b\{(1-a^2)b - 2a\} = 0$

$b \neq 0$ より

$b = \dfrac{2a}{1-a^2}$ …①

①より $\tan\alpha = b = \dfrac{2a}{1-a^2}$ …エ

$\tan\beta = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1-a^2}{2a}$ …オ

$\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}} = \dfrac{2a}{1-a^2} \cdot \left\{\sqrt{\left(\dfrac{2a}{1-a^2}\right)^2+1}\right\}^{-1}$

$= \dfrac{2a}{1-a^2}\left(\sqrt{\dfrac{4a^2+(1-a^2)^2}{(1-a^2)^2}}\right)^{-1}$

$= \dfrac{2a}{1-a^2} \cdot \left(\dfrac{1+a^2}{1-a^2}\right)^{-1}$

$= \dfrac{2a}{1+a^2}$ …カ

$\tan\beta + \dfrac{1}{\cos\beta}$

$= \dfrac{1-a^2}{2a} + \dfrac{1+a^2}{2a}$

$= \dfrac{1}{a}$ …キ