等式 (★) $x^2 - xy + y^2 = 2$ を満たす実数 x, y に対し, $x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を以下の手順で求めよう。

(1) まず, $p = x + y,\ q = xy$ とおき, $x^3 + y^3 + 3xy$ を $p,\ q$ を用いた式で表すと, $\boxed{\text{ア}}$ となる。

(2) 次に, $x^3 + y^3 + 3xy$ を p のみを用いた式で表そう。

等式 (★) を p, q を用いて書き直し, q について解くと $q = \boxed{\text{イ}}$ となる。したがって, $x^3 + y^3 + 3xy$ を p を用いて表せば $\boxed{\text{ウ}}$ となる。

(3) p のとり得る値の範囲を求めよう。

x, y を解とする t についての方程は $t^2 - pt + \boxed{\text{イ}} = 0$ であり, この 2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件を p を用いて表すと $\boxed{\text{エ}}$ となる。したがって, p がとり得る値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 以上より, $x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を求める問題は $\boxed{\text{オ}}$ の範囲における $\boxed{\text{ウ}}$ の最大値と最小値を求める問題に帰着され, 次のように求まる。

$(x, y) = \boxed{\text{カ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとり,

$(x, y) = \boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}$ のとき, 最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

〔日本大〕