1a maxmin 25

等式 (★) $x^2 - xy + y^2 = 2$ を満たす実数 x, y に対し, $x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を以下の手順で求めよう。

(1) まず, $p = x + y,\ q = xy$ とおき, $x^3 + y^3 + 3xy$ を $p,\ q$ を用いた式で表すと, $\boxed{ア}$ となる。

(2) 次に, $x^3 + y^3 + 3xy$ を p のみを用いた式で表そう。

等式 (★) を p, q を用いて書き直し, q について解くと $q = \boxed{イ}$ となる。したがって, $x^3 + y^3 + 3xy$ を p を用いて表せば $\boxed{ウ}$ となる。

(3) p のとり得る値の範囲を求めよう。

x, y を解とする t についての方程は $t^2 - pt + \boxed{イ} = 0$ であり, この 2 次方程式が実数解をもつための必要十分条件を p を用いて表すと $\boxed{エ}$ となる。したがって, p がとり得る値の範囲は $\boxed{オ}$ である。

(4) 以上より, $x^3 + y^3 + 3xy$ の最大値と最小値を求める問題は $\boxed{オ}$ の範囲における $\boxed{ウ}$ の最大値と最小値を求める問題に帰着され, 次のように求まる。

$(x, y) = \boxed{カ}$ のとき, 最大値 $\boxed{キ}$ をとり,

$(x, y) = \boxed{ク}, \boxed{ケ}$ のとき, 最小値 $\boxed{コ}$ をとる。

日本大

(1) x^3+y^3+3xy

$= (x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy$

$= (x+y)\{(x+y)^2-3xy\}+3xy = p(p^2-3q)+3q$

$\therefore\ p^3-3pq+3q$ …ア

(2) $(x+y)^2-3xy=2$

$p^2-3q=2$

$3q = p^2-2$

$\therefore\ q = \dfrac{p^2-2}{3}$ …イ

$p^3+3q(1-p) = p^3+(p^2-2)(1-p)$

$= \cancel{p^3}+p^2-\cancel{p^3}-2+2p$

$= p^2+2p-2$ …ウ

$t^2-pt+\dfrac{p^2-2}{3}=0$ 判別式 $D \geqq 0$ より

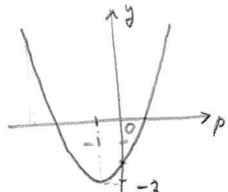
$p^2-4\left(\dfrac{p^2-2}{3}\right) \geqq 0$

$3p^2-4p^2+8 \geqq 0$

$p^2 \leqq 8$ …エ

$-2\sqrt{2} \leqq p \leqq 2\sqrt{2}$ …オ

ウより $(p+1)^2-3$



$p=2\sqrt{2}$ のとき最大値で $6+4\sqrt{2}$ キ

このとき $t^2-2\sqrt{2}t+2=0$ より $(t-\sqrt{2})^2=0$

$(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ カ

$p=-1$ のとき最小値で -3 コ このとき

$t^2+t-\dfrac{1}{3}=0 \to 3t^2+3t-1=0$

$t = \dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

$(x, y) = \left(\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}, \dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}\right), \left(\dfrac{-3-\sqrt{21}}{6}, \dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$ …クケ