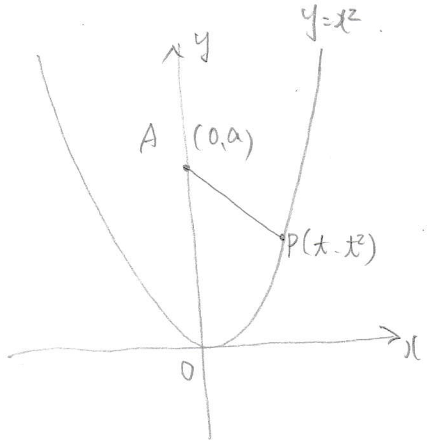
IA marumia24

a を正の実数とする。点 P が放物線 $y = x^2$ 上を動くとき, P と点 $\mathrm{A}(0,\, a)$ の距離の最小値を $m(a)$ とする。$m(a)$ を a の式で表せ。〔東京女子〕



左図のようにして点 $P(t,t^2)$ として, AP の距離を $M(a)$ とし

$M(a)$ を求める式をつくると

$M(a)^2 = t^2 + (t^2 - a)^2$

$M(a)^2 = t^2 + t^4 - 2at^2 + a^2$

$= t^4 + (1-2a)t^2 + a^2$

$= \left(t^2 + \dfrac{1-2a}{2}\right)^2 + \dfrac{4a-1}{4}$

$1-2a > 0$ のとき, つまり $a < \frac{1}{2}$ のときは

$t^2 + \dfrac{1-2a}{2}$ は常に正となるので

$M(a)^2$ の最小値 $m(a)$ は $t=0$ のとき このとき

$m(a) = \sqrt{\left(\dfrac{1-2a}{2}\right)^2 + \dfrac{4a-1}{4}} = a$

$1-2a \leqq 0$ のとき つまり $a \geqq \frac{1}{2}$ のときは

$t^2 = -\dfrac{1-2a}{2}$ のとき最小で このとき

$m(a) = \sqrt{\dfrac{4a-1}{4}}$

$\therefore\ m(a) \begin{cases} a & (\because a < \frac{1}{2}) \\ \sqrt{\dfrac{4a-1}{4}} & (\because a \geqq \frac{1}{2}) \end{cases}$