JA max min 22

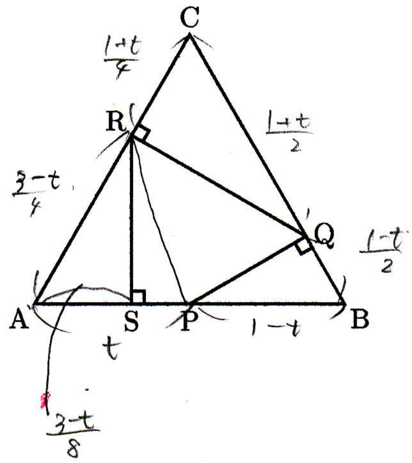
AP 一[illegible]

1辺の長さが1の正三角形ABCがある。辺AB上の点Pから辺BC上に下ろした垂線の足をQ, 点Qから辺CAに下ろした垂線の足をR, 点Rから辺ABに下ろした垂線の足をSとする。

線分APの長さをAB $= t \ (0 < t < 1)$ とするとき, $\overline{\mathrm{AS}} < \overline{\mathrm{AP}}$ となるような t の範囲は $\boxed{ア} < t < 1$ である。

$\boxed{ア} < t < 1$ のとき, 3つの線分PQ, QR, RSの長さの和を L とすると, $\dfrac{L}{\sqrt{3}}$ のとり得る値の範囲は $\boxed{イ} < \dfrac{L}{\sqrt{3}} < \boxed{ウ}$ となる。

$0 < t < 1$ において, 線分PRの長さが最小となるのは $t = \boxed{エ}$ のときである。



〔中央大〕

$AP = t$ より $PB = 1-t$ $\quad QB = \frac{1-t}{2}$ $\quad QC = 1 - \frac{1-t}{2} = \frac{1+t}{2}$

$CR = \frac{1+t}{4}$ $\quad AR = 1 - \frac{1+t}{4} = \frac{3-t}{4}$ $\quad \therefore AS = \frac{3-t}{8}$ これより $AS < AP$ は

$\frac{3-t}{8} < t \quad 8t > 3-t \quad 9t > 3 \quad \frac{1}{3} < t < 1$ ア

$$L = PQ + QR + RS = \frac{1-t}{2}\sqrt{3} + \frac{1+t}{4}\sqrt{3} + \frac{3-t}{8}\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{t}{2} + \frac{t}{4} - \frac{t}{8}\right)$$
$$= \sqrt{3}\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{8}t\right)$$

$\therefore \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{9}{8} - \frac{3}{8}t$ ア より $\frac{1}{3} < t < 1$ より

$t = \frac{1}{3}$ のとき $\frac{L}{\sqrt{3}} = 1$ $\quad t = 1$ のとき $\frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$ であるから $\frac{3}{4} < \frac{L}{\sqrt{3}} < 1$ イ ウ

$AS = \frac{3-t}{8}$ より $SP = t - \frac{3-t}{8} = \frac{-3+9t}{8}$

△RSPで三平方の定理を用いると

$$PR = \sqrt{\frac{3(3-t)^2}{64} + \frac{9(3t-1)^2}{64}} = \frac{1}{4}\sqrt{21t^2 - 18t + 9}$$

このとき $\sqrt{\ }$ の中は

$21\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{36}{7}$ となるので $t = \frac{3}{7}$ のとき最小となる エ