放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{S}(s, s^2)$, $\mathrm{T}(t, t^2)$, $\mathrm{O}(0, 0)$ がある。ただし, $s > 0$, $t < 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$SOT の面積を求めよ。

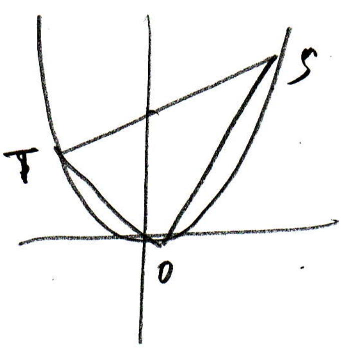
(2) $\triangle$SOT の内接円の半径を求めよ。

(3) 実数 s, t が条件 $st = -k$ を満たしながら, $s > 0, t < 0$ の範囲を動くとき, $\triangle$SOT の面積の最小値を求めよ。ただし, k は定数で $k > 0$ とする。

〔鳥取大〕

(1) $S = \frac{1}{2}(st^2 - ts^2)$　　$t<0$ より

(2) 内接円の半径を r とすると



$S = \frac{1}{2}r(OT + OS + TS)$ であるから $r = \dfrac{2S}{OT + OS + TS}$ ①

$OT = \sqrt{t^4 + t^2} = -t\sqrt{t^2+1}$　$t<0$ より

$OS = \sqrt{s^4 + s^2} = s\sqrt{s^2+1}$

$TS = \sqrt{(s-t)^2 + (s^2-t^2)^2}$

$= \sqrt{(s-t)^2 + (s+t)^2(s-t)^2} = (s-t)\sqrt{1+(s+t)^2}$

これとのより

$$r = \frac{st^2 - ts}{-t\sqrt{t^2+1} + s\sqrt{s^2+1} + (s-t)\sqrt{1+(s+t)^2}}$$

(3)

$st = -k$ より　$S = \frac{1}{2}st(t-s)$ であるから

$t = -\frac{k}{s}$ として

$S = \frac{1}{2}\cdot(-k)\cdot\left(-\frac{k}{s} - s\right)$

$= \frac{1}{2}k\left(s + \frac{k}{s}\right)$

ここで

$\left(s + \frac{k}{s}\right) \geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{k}{s}} = 2\sqrt{k}$ であるから

$S = \frac{1}{2}k\underbrace{\left(s + \frac{k}{s}\right)}_{2\sqrt{k}\text{ が最小より}} \geqq k\sqrt{k}$　　$\therefore$ $\underline{k\sqrt{k}}$